TEMA 4

ANÁLISIS DEL RIESGO

Revisado en diciembre de *2023*

The book has grown out of a class I taught on the economics of risk at the University of Wisconsin. My students have helped me in many ways with their questions, inquires and suggestions

Jean Paul Chavas, Risk Analysis in Theory and Practice

4.1. La descripción del riesgo.

Riesgo.

Una situación en la que algunos sucesos no son conocidos con certeza de antemano.

En el mejor de los casos, se puede atribuir una probabilidad a determinados resultados. El marco de análisis del riesgo va a ser probabilístico.

Origen del Riesgo.

1. Aunque se entienda con cierto detalle un fenómeno puede ser difícil predecir el resultado si este cambia dramáticamente con las condiciones iniciales. Por ejemplo, la física que determina el resultado de tirar una moneda al aire (cara o cruz) es perfectamente conocida. Sin embargo, no sirve para predecir con exactitud el resultado por su dependencia de mínimos cambios en las condiciones de lanzamiento de la moneda o del medio en que se lanza (fenómeno caótico).

2. Los resultados científicos, que hacen referencia a conocimiento con certeza, se obtienen en ambientes controlados. Los fenómenos del mundo real ocurren en ambientes no controlados (por ejemplo, temperatura, presión, humedad, etc.). Un ejemplo es la meteorología. Se conoce bastante sobre las propiedades físicas de la atmósfera, pero el fenómeno tiene lugar en un ambiente no controlado en que casi cualquier cambio es posible.

3. En fenómenos que no están sujetos a cambios ambientales aparecen dos circunstancias relacionadas con la capacidad de conocimiento humano. En primer lugar, nuestra capacidad limitada de conocimiento. En segundo lugar, que el adquirir conocimiento es costoso y, muy a menudo, dejar una cierta incertidumbre puede ser más beneficioso que adquirir toda la información. Un caso claro es el del juego del ajedrez. Se pueden estudiar todos los movimientos y sus consecuencias, pero su coste es prohibitivo.

Representación del riesgo.

Descripción cuantitativa del riesgo.

a. Describir o enumerar posibles resultados.

   Ejemplos

   A1: apruebo o suspendo.

   A2: gano *1000* €, gano *300* € o pierdo *500* €.

b. Atribuir una ***probabilidad*** a cada posible resultado.

4.1.1. Conceptos básicos de estadística.

Variable Aleatoria.

Se trata de una *Variable* (representante genérica de un conjunto) que tiene asociada una *Probabilidad*.

Probabilidad.

Frecuencia poblacional de aparición (definición informal).

Aproximación Axiomática. ¿Cómo trabajan los matemáticos? ¿Por qué es útil?

Subiendo el nivel intelectual de la discusión.

Probabilidad Objetiva.

Probabilidad Subjetiva (*Bayes*).

Riesgo e Incertidumbre.

Caso 1.

En una bolsa tengo cinco bolas blancas y cinco bolas negras. ¿Qué probabilidad tienes de acertar el color de una bola extraída al azar?

Caso 2.

En una bolsa tienes un número indeterminado de bolas blancas y negras. ¿Qué probabilidad tienes de acertar el color de una bola extraída al azar?

Ejemplo de Variable Aleatoria 1.

La *Variable Aleatoria X* representa el número en la cara superior de un dado. Esta *Variable* puede tomar el valor de los números naturales comprendidos entre el *1* y el *6*. Todos los números tienen la misma probabilidad de aparecer en la cara superior. Es decir:

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Pi_4 = \Pi_5 = \Pi_6 = \frac{1}{6}.$$

donde, Π_i es la probabilidad de aparición de cada número.

Valor Esperado.

Es la *Esperanza Matemática* de la *Variable Aleatoria*. Es decir:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_i X_i \Pi_i .$$

La *Esperanza* indica el "centro" de la *Distribución Probabilística*.

Subiendo el nivel intelectual de la discusión.

Distribución Discreta versus *Distribución Continua*. *Punto* versus *Intervalo*. *Probabilidad* versus *Función de Densidad* y *Función de Distribución*. *Sumatorios* versus *Integrales*. *Matemática Discreta* versus *Matemática Continua*. Ventajas e inconvenientes.

En el caso del dado el *Valor Esperado* es:

$$\mathrm{E}[X] = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3{,}5 .$$

Ejemplo de Variable Aleatoria 2.

Lanzando una moneda al aire, si sale *Cara* ganas *6* € y si sale *Cruz* pierdes *6* €.

$$Y = 6 \quad \Pi = \frac{1}{2}$$

$$Y = -6 \; 1 - \Pi = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{E}[Y] = 6 \times \frac{1}{2} - 6 \times \frac{1}{2} = 0$$

Este es un ***Juego de Esperanza Cero***.

Ejemplo de Variable Aleatoria 3.

Lanzando una moneda al aire, si sale *Cara* ganas *60 €* y si sale *Cruz* pierdes *6 €*.

$$Z = 60 \quad \Pi = \frac{1}{2}$$

$$Z = -6 \quad 1 - \Pi = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{E}[Z] = 60 \times \frac{1}{2} - 6 \times \frac{1}{2} = 27$$

Este juego tiene un *Pago Esperado* de *27 €*. ¿Cuánto se podría pagar por participar en este juego?

Propiedades de la Esperanza.

Es un *Operador Lineal*. Se cumple que: $Y = \alpha + \beta X \Rightarrow E[Y] = \alpha + \beta E[X]$.

Varianza.

La *Varianza* es una *Medida de Dispersión*. Es la *Esperanza* de las diferencias entre las posibles realizaciones de la variable aleatoria y la *Esperanza* elevadas al cuadrado.

$$V(X) = \sum_i \left(X_i - \mathrm{E}[X]\right)^2 \Pi_i$$

$$V(X) = \mathrm{E}\left[\left(X - \mathrm{E}[X]\right)^2\right]$$

Alternativamente, se puede escribir como:

$$V(X) = \sum_i \left(X_i^2 - 2X_i\mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[X]^2\right)\Pi_i$$

$$V(X) = \sum_i X_i^2\Pi_i - 2\mathrm{E}[X]\sum_i X_i\Pi_i + \mathrm{E}[X]^2 \sum_i \Pi_i$$

$$V(X) = \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[X]^2$$

$$V(X) = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2$$

Propiedades de la *Varianza.*

$$Y = \alpha + \beta X$$

$$V(Y) = \beta^2 V(X)$$

Demostración.

$$Y = \alpha + \beta X$$
$$E[Y] = \alpha + \beta E[X]$$
$$Y - E[Y] = \beta\left(X - E[X]\right)$$
$$\left(Y - E[Y]\right)^2 = \beta^2\left(X - E[X]\right)^2$$
$$V(Y) = E\left[\left(Y - E[Y]\right)^2\right] = E\left[\beta^2\left(X - E[X]\right)^2\right]$$
$$V(Y) = \beta^2 E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right] = \beta^2 V(X)$$

Ejemplos.

Calcular la *Varianza* de lanzar una moneda (*Cara = 1*, *Cruz = 0*).

Calcular la *Varianza* de lanzar un dado.

Covarianza.

La *Covarianza* de dos *Variables Aleatorias* se puede escribir como:

$$C(X_1, X_2) = \sum_i \sum_j \left(X_{1i} - \mathrm{E}[X_1]\right)\left(X_{2j} - \mathrm{E}[X_2]\right)\Pi_{ij}.$$

Es importante darse cuenta de que se trata de la *Esperanza* del producto de las diferencias de cada variable con su respectiva *Esperanza*. Es decir:

$$C(X_1, X_2) = E\left[\left(X_1 - E[X_1]\right)\left(X_2 - E[X_2]\right)\right]$$
$$C(X_1, X_2) = E\left[X_1 X_2 - X_1 E[X_2] - X_2 E[X_1] + E[X_1]E[X_2]\right]$$
$$C(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] - E[X_1]E[X_2] + E[X_1]E[X_2]$$
$$C(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]$$

Interpretación.

Existen tres casos.

1. Asociación positiva entre X_1 y X_2.

La variable X_1 tiende a estar por encima de su *Esperanza* cuando la variable X_2 está por encima de su *Esperanza*. Las diferencias con la *Esperanza* tienden a ser positivas. Por tanto, el producto de las diferencias tiende a ser positivo. Por otra parte, la variable X_1 tiende a estar por debajo de su *Esperanza* cuando la variable X_2 está por debajo de la *Esperanza*. Las diferencias con la *Esperanza* son negativas. Por tanto, el producto de las diferencias tiende a ser positivo. Como consecuencia, la *Esperanza* de los productos de las diferencias (una suma ponderada) tiende a ser positiva.

	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$x_i y_i$
Observación 1	*1*	*1*	*−4*	*−4*	*16*	*1*
Observación 2	*5*	*5*	*0*	*0*	*0*	*25*
Observación 3	*9*	*9*	*4*	*4*	*16*	*81*
Suma	*15*	*15*	*0*	*0*	*32*	*107*
Media	*5*	*5*	*0*	*0*	*10,6*	*35,6*

2. Asociación negativa entre X_1 y X_2.

La variable X_1 tiende a estar por encima de su *Esperanza* cuando la variable X_2 está por debajo de su *Esperanza* (y viceversa). Las diferencias entre las variables y su *Esperanza* son positivas y negativas respectivamente. El producto de las diferencias tiende a ser negativo. La *Esperanza* de este producto de diferencias (una suma ponderada) tiende a ser negativa.

	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$x_i y_i$
Observación 1	*1*	*9*	*-4*	*4*	*-16*	*9*
Observación 2	*5*	*5*	*0*	*0*	*0*	*25*
Observación 3	*9*	*1*	*4*	*-4*	*-16*	*9*
Suma	*15*	*15*	*0*	*0*	*-32*	*43*
Media	*5*	*5*	*0*	*0*	*-10,6*	*14,3*

3. ***Independencia*** entre X_1 y X_2.

Una de las variables está por encima de la *Esperanza* y la otra puede estar, indistintamente, por encima o por debajo. Las diferencias pueden ser positivas o negativas. El producto es positivo o negativo. La *Esperanza* de este producto de diferencias (una suma ponderada) tiende a ser cero.

	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$x_i y_i$
Observación 1	*1*	*3*	*-4*	*-2*	*8*	*3*
Observación 2	*5*	*9*	*0*	*4*	*0*	*45*
Observación 3	*9*	*3*	*4*	*-2*	*-8*	*27*
Suma	*15*	*15*	*0*	*0*	*0*	*75*
Media	*5*	*5*	*0*	*0*	*0*	*25*

Varianza de la suma de dos Variables Aleatorias.

La suma y la suma al cuadrado de las variables aleatorias se escribe como:

$$Z = X_1 + X_2$$
$$Z^2 = X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2$$

Las *Esperanzas* de estas *Variables Aleatorias* son:

$$E[Z] = E[X_1] + E[X_2]$$
$$E\left[Z^2\right] = E\left[X_1^2\right] + E\left[X_2^2\right] + 2E[X_1X_2]$$

La *Esperanza* al cuadrado es: $E[Z]^2 = E[X_1]^2 + E[X_2]^2 + 2E[X_1]E[X_2]$.

La *Varianza* de la suma de variables aleatorias (*Z*) se escribe como:

$$V(Z) = E\left[Z^2\right] - E[Z]^2 = E\left[X_1^2\right] + E\left[X_2^2\right] + 2E[X_1X_2] - E[X_1]^2 - E[X_2]^2 - 2E[X_1]E[X_2]$$
$$V(Z) = \left(E\left[X_1^2\right] - E[X_1]^2\right) + \left(E\left[X_2^2\right] - E[X_2]^2\right) + 2\left(E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]\right)$$
$$V(Z) = V(X_1) + V(X_2) + 2C(X_1, X_2)$$

Comentario.

La *Varianza* de una suma de *Variables Aleatorias* se puede reducir si la *Covarianza* es negativa.

Un caso interesante ocurre cuando X_1 y X_2 son dos *Variables Aleatorias* que representan el rendimiento de dos *Activos*.

4.2. Preferencias sobre el Riesgo.

4.2.1. Análisis intuitivo.

Comparar un conjunto de negocios.

Ejemplo 1.

	Mala Cosecha	***Buena Cosecha***
Probabilidad	$\pi = ½$	$1 - \pi = ½$
Semilla 1	*40*	*60*
Semilla 2	*50*	*70*

Ejemplo 2.

	Mala Cosecha	*Buena Cosecha*
Probabilidad	π=½	$1-\pi$ = ½
Semilla 1	*40*	*60*
Semilla 2	*10*	*90*

Ejemplo 3.

	Mala Cosecha	*Buena Cosecha*
Probabilidad	π=½	$1-\pi$ = ½
Semilla 1	*40*	*60*
Semilla 2	*20*	*100*

Presentamos de nuevo los ejemplos en términos de *Esperanza* y *Varianza*.

Ejemplo 1.

	Valor Esperado	*Varianza*
Semilla 1	*50*	*100*
Semilla 2	*60*	*100*

Ejemplo 2.

	Valor Esperado	*Varianza*
Semilla 1	*50*	*100*
Semilla 2	*50*	*1600*

Ejemplo 3.

	Valor Esperado	*Varianza*
Semilla 1	*50*	*100*
Semilla 2	*60*	*1600*

Distinta *Media* y distinta *Varianza*.

La elección entre las dos últimas semillas, requiere una representación de las ***Preferencias sobre el Riesgo***.

Idea intuitiva sobre las preferencias sobre el riesgo.

Dispones de *1.000* euros para pasar el mes. Puedes participar en un juego que consiste en una apuesta a *Cara* o *Cruz*.

Sale *Cara*: recibes *1.000* euros.

Sale *Cruz*: pagas *1.000* euros.

¿Aceptarías la apuesta?

Análisis económico básico (intuitivo).

Por una parte, pasar el mes con *2.000* euros es mejor que pasarlo con *1.000* euros. Hay una ganancia de bienestar. Por otra parte, pasar el mes con *1.000* euros es ***MUCHO*** mejor que pasarlo con *0* euros. Hay una pérdida de bienestar mucho mayor asociada a perder la apuesta que la ganancia asociada a ganar la apuesta.

La renuencia a aceptar esta apuesta se basa en que ante dos cambios en los pagos de *1.000* euros (de *0* a *1.000* euros y de *1.000* a *2.000* euros) el primer tramo incrementa más el bienestar que el segundo.

La situación inicial también es importante. No es lo mismo recibir *400* euros (o perderlos) cuando no tienes nada que recibir la misma cantidad (o perderla) cuando tienes *1* millón de euros.

La *Esperanza* de los pagos no tiene en cuenta el efecto de los pagos en el bienestar de los individuos.

Sería necesario usar una *Esperanza* del Bienestar en vez de una *Esperanza* de los pagos. El concepto que recoge esta idea es el de *Utilidad Esperada*. Es la *Esperanza* de la *Utilidad* (el bienestar) que se logra bajo los diferentes resultados de una situación con riesgo.

4.2.2. Análisis formal.

El *Valor Esperado* no es una herramienta adecuada para explicar las decisiones del individuo en condiciones de riesgo. **Bernoulli** propone la *Utilidad Esperada* como alternativa.

Utilidad Esperada: $EU(X) = \sum_i U(X_i)\Pi_i = E\left[U(X)\right]$.

Definiciones.

1. *Aversión (renuencia) al Riesgo.*
2. *Neutralidad al Riesgo.*
3. *Amor al Riesgo.*

Modelización de la *Aversión (renuencia) al Riesgo*. La *Aversión al Riesgo* se representa por una *Función de Utilidad* con *Utilidad Marginal Decreciente de la Renta*.

Un individuo es *Averso al Riesgo* si la *Utilidad* del *Valor Esperado* con certeza es mayor que la *Utilidad Esperada* de una situación incierta.

Una situación incierta se define del siguiente modo:

$$\begin{array}{ll} \text{Pagos:} & X_1,\ldots,X_n \\ \text{Probabilidades:} & \Pi_1,\ldots,\Pi_n \end{array}$$

El *Valor Esperado* se define como: $E[X]=\sum_i X_i\Pi_i$.

La *Utilidad Esperada* se define como: $EU(X)=\sum_i U(X_i)\Pi_i$.

La *Aversión al Riesgo* ocurre cuando: $U(E[X]) > EU(X)$.

Ejemplo numérico de Aversión al Riesgo.

Las *Preferencias del Individuo* se representan mediante la siguiente *Función de Utilidad*: $U(X)=\sqrt{X}$.

Tenemos un negocio que nos proporciona los siguientes pagos con sus correspondientes probabilidades:

$$X_1=100 \quad \Pi_1=\frac{1}{2}$$

$$X_2=400 \quad \Pi_2=\frac{1}{2}$$

¿Es el individuo *Averso al Riesgo*?

Valor Esperado del negocio: $E[X]= 100 \times ½ + 400 \times ½ = 250$.

Utilidad Esperada del negocio: $EU(X)=\sqrt{100}\times ½+\sqrt{400}\times ½= 15$.

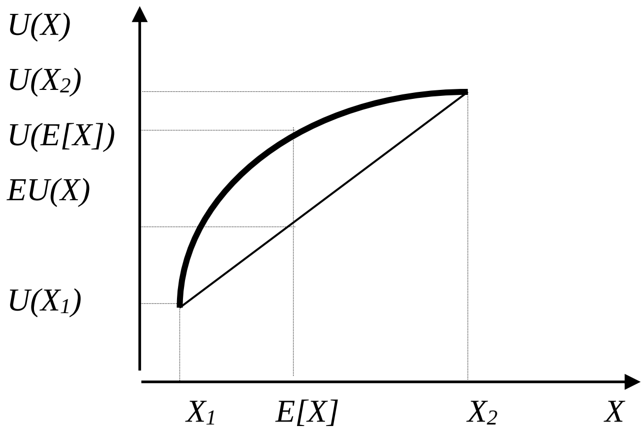
Utilidad del *Valor Esperado* recibido con certidumbre: $U(E[X])=\sqrt{250}=15{,}81$.

Por tanto:

$U\left(E\left[X\right]\right) = 15{,}81 > 15 = EU\left(X\right) \Rightarrow U\left(E\left[X\right]\right) > EU\left(X\right)$

Es decir, este individuo prefiere el *Valor Esperado* con certeza al valor incierto. En otras palabras, es *Averso al Riesgo*.

A continuación, se dibuja la *Función de Utilidad* de un individuo *Averso al Riesgo*:



$$E\left(X\right) = X_1 \left(1 - \Pi\right) + X_2 \Pi$$
$$EU(X) = U\left(X_1\right) \left(1 - \Pi\right) + U\left(X_2\right)\Pi$$

La clave del gráfico es que el segmento que une X_1 y X_2 contiene la *Esperanza* de este juego. Si $\Pi = 1$ la *Esperanza* está en el punto X_2. Si $\Pi = 0$ la *Esperanza* está en el punto X_1. Cuando la probabilidad está comprendida entre cero y uno, la *Esperanza* se encuentra en el interior del segmento. Del mismo modo, la *Utilidad Esperada* del juego analizado se encuentra en el segmento que une $U(X_1)$ y $U(X_2)$. El individuo es *Averso al Riesgo* si la *Utilidad* del *Valor Esperado* está por encima de la *Utilidad Esperada* (segmento). Por tanto, se ha mostrado gráficamente que:

Aversión al Riesgo $\Rightarrow$ *Utilidad* cóncava en los pagos $\Rightarrow U''\left(X\right) < 0$.

Intuición económica.

La *Función de Utilidad* cóncava en los pagos se corresponde con una *Función de Utilidad* con *Utilidad Marginal Decreciente* en los pagos.
La *Utilidad Marginal Decreciente* en los pagos implica que los pagos por encima de la media que se producen en las situaciones favorables incrementan menos la utilidad de lo que la disminuyen los pagos por debajo de la media que se producen en las situaciones desfavorables. Por tanto, el individuo con *Utilidad Marginal Decreciente* prefiere **la media de los pagos con certidumbre a la situación incierta** que implica pagos bajos por debajo de la media y pagos altos por encima de la media. En otras palabras, es *Averso al Riesgo*.

Comentario sobre la posibilidad de observar la Aversión al Riesgo.
Es importante distinguir entre *Preferencias* sobre el *Riesgo* y comportamientos observados ante situaciones arriesgados. En el comportamiento observado, entrarían otras consideraciones como la tecnología para manejar el riesgo (por ejemplo, diversificación) o el entramado institucional de manejo del riesgo (seguros, leyes e instituciones). En este sentido, es ilustrativo comparar España, Europa, Estados Unidos y África.

El Equivalente Cierto (*EC*).
Es aquella cantidad recibida con certeza cuya utilidad es igual a la *Utilidad Esperada* de la situación con riesgo. Es decir, $EC \mid U(EC) = EU(X)$.

Ejemplo 1.
Representación de las preferencias: $U\left(X\right) = \sqrt{X}$.

Tenemos un negocio que nos proporciona los siguientes pagos con sus correspondientes probabilidades:

$$X_1 = 100 \quad \Pi_1 = \frac{1}{2}$$

$$X_2 = 400 \quad \Pi_2 = \frac{1}{2}$$

La *Utilidad Esperada* es: $EU(X) = \sqrt{100} \times ½ + \sqrt{400} \times ½ = 15$.

El *Equivalente Cierto* se calcula buscando una cantidad cuya *Utilidad* sea igual a la *Utilidad Esperada*:

$$\sqrt{EC} = 15$$
$$EC = 15^2 = 225$$

El individuo es indiferente entre esta cantidad entregada con certidumbre y la situación de riesgo.

Ejemplo 2.

Las preferencias son las mismas. Los pagos y las probabilidades del negocio son:

$$X_1 = 100 \quad \Pi_1 = \frac{5}{7}$$
$$X_2 = 625 \quad \Pi_2 = \frac{2}{7}$$

$$EU = \frac{5}{7} \times \sqrt{100} + \frac{2}{7} \times \sqrt{625} = 14{,}28$$
$$\sqrt{EC} = 14{,}28 \Rightarrow EC = 14{,}28^2 = 204{,}08$$
$$E[X] = 250$$

El *Equivalente Cierto* es menor al *Valor Esperado* para un individuo *Averso al Riesgo*.

La *Aversión al Riesgo* ocurre cuando: $U(E[X]) > EU(X)$.

El *Equivalente Cierto* (*EC*) se define como: $U(EC) = EU(X)$.

Por tanto, se tiene que: $U(E[X]) > U(EC)$.

Si la *Función de Utilidad* es creciente se tiene que: $E[X] > EC$.

Prima al Riesgo.

Es la diferencia entre el *Valor Esperado* de los pagos de la situación incierta y el *Equivalente Cierto*.

$$PR = E[X] - EC.$$

*Neutralidad ante el Riesgo (*importante para entender el concepto de *Prima de Riesgo).*

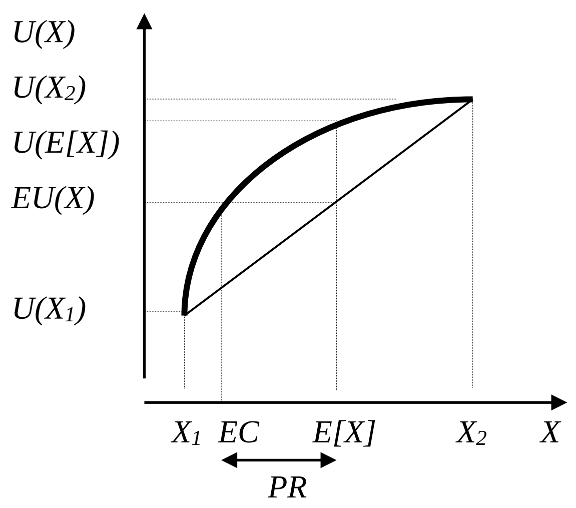
Un individuo es *Neutral al Riesgo* si se muestra indiferente entre el pago esperado de una situación incierta y la situación incierta. Es decir, si la *Utilidad* del *Valor Esperado* con certeza es igual que la *Utilidad Esperada* de una situación incierta. Por tanto, la neutralidad al riesgo ocurre cuando: $U\left(E[X]\right) = EU(X)$.

La fórmula anterior implica **que el *Valor Esperado* es el *Equivalente Cierto* para un individuo *Neutral al Riesgo***.

La *Prima al Riesgo* es el descuento en la evaluación de una situación con riesgo de un individuo *Averso al Riesgo* (*EC*) con respecto a un individuo *Neutral al Riesgo* $\left(E[X]\right)$.

En el gráfico anterior la *Utilidad del Valor Esperado* de un individuo *Neutral al Riesgo* estaría justamente sobre el segmento que une las utilidades de los pagos con certidumbre. Por tanto, la utilidad se superpone a ese segmento. Es decir, es lineal.

Representación gráfica de la prima al riesgo



Factores que afectan a la *Prima al Riesgo*.

La *Prima al Riesgo* se puede escribir como: $E[X]-EC \approx \frac{1}{2} rV(X)$.

donde, r es el *Coeficiente de Aversión al Riesgo de Arrow-Pratt:* $r=-\frac{U''(E[X])}{U'(E[X])}$.

El coeficiente r mide la curvatura de la *Función de Utilidad*. La concavidad será mayor cuanto mayor sea el valor absoluto de la segunda derivada ($-U''$). Por tanto, la aversión al riego será mayor cuanto mayor sea el valor absoluto de la segunda derivada. No obstante, la *Aversión al Riesgo* no se puede medir exclusivamente por la segunda derivada ya que la medida dependería de las unidades en que se mida la *Utilidad*. Al dividir por la *Utilidad Marginal* desaparecen las unidades de medida de la *Utilidad*.

La *Prima al Riesgo* dependerá de las *Preferencias sobre el Riesgo* r y de la *Varianza*.

Ejemplo 1.

$X_1 = 10 \quad \Pi_1 = ½.$

$X_2 = 1 \quad \Pi_2 = ½.$

Consideramos dos individuos con las siguientes preferencias:

$$U_a(X) = \ln X$$
$$U_b(X) = \sqrt{X}$$

Calcular el *EC* y la *Prima al Riesgo*.

$$E[X] = 1 \times ½ + 10 \times ½ = 5{,}5$$
$$EU_a(X) = \ln 1 \times ½ + \ln 10 \times ½ = 1{,}15$$
$$\ln EC_a = 1{,}15 \Rightarrow EC_a = 3{,}16$$
$$PR_a = 5{,}5 - 3{,}16 = 2{,}33$$

$$EU_b = \sqrt{1} \times ½ + \sqrt{10} \times ½ = 2{,}08$$
$$\sqrt{EC_b} = 2081{,}3 \Rightarrow EC_b = 4{,}33$$
$$PR_b = 5{,}5 - 4{,}33 = 1{,}17$$

La *Prima al Riesgo* es más alta en el caso de las preferencias representadas por la *Función de Utilidad* $\ln X$ ya que es una función "más cóncava" que $\sqrt{X}$. El coeficiente *r* es mayor y, por tanto, tiene mayor *Aversión al Riesgo*.

$$U_a = \ln X \quad U_a^{'} = \frac{1}{X} \quad U_a^{''} = -\frac{1}{X^2}$$

$$r_a = -\frac{U_a^{''}}{U_a^{'}} = -\frac{-\frac{1}{X^2}}{\frac{1}{X}} = \frac{1}{X}$$

$$U_b = \sqrt{X} = X^{\frac{1}{2}} \qquad U_b^{'} = \frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{X}} \qquad U_b^{''} = -\frac{1}{4}X^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{X^3}}$$

$$r_b = -\frac{U_b^{''}}{U_b^{'}} = -\frac{-\frac{1}{4}X^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2X}$$

Por tanto, $r_a > r_b$ para todo *X*.

Ejemplo 2.

$U = \sqrt{X}$

$X_1 = 5 \qquad \Pi_1 = ½$

$X_2 = 6 \qquad \Pi_2 = ½$

$EU(X) = ½ \times \sqrt{5} + ½ \times \sqrt{6} = 2{,}34$

$\sqrt{EC} = 2{,}34 \Rightarrow EC = 5{,}48$

$PR = 5{,}5 - 5{,}48 = 0{,}02$

Ejemplo.

Un trabajador *Averso al Riesgo* $(U = \ln x)$ se muestra indiferente entre dos tipos de contrato. En el primer contrato, le ofrecen un un salario anual de *y* con un probabilidad de renovación por un segundo año de ½. En el segundo contrato, le ofrecen un salario **anual** de *z* por dos años. Analiza la relación entre ambos salarios anuales.

La tabla de pagos con riesgo en el primer contrato es:

Probabilidad	½	½
Pagos	*y*	*2y*

El segundo contrato implica un *Pago Cierto* de *2z*.

La *Utilidad Esperada* del primer contrato es: $EU_1 = \frac{1}{2}\ln y + \frac{1}{2}\ln 2y$.

La *Utilidad* del segundo contrato es *ln2z*.

La indiferencia entre contratos implica que: $\frac{1}{2}\ln y + \frac{1}{2}\ln 2y = \ln 2z$.

El resultado es que $y = \sqrt{2}z$. Es decir, hay que pagar un salario anual más alto por el contrato temporal.

4.3. La reducción del riesgo.

Gestionando el Riesgo.

1. La diversificación.

Caso 1. El problema del transporte de huevos.

"No pongas todos los huevos en la misma cesta".

Transportando una docena de huevos ***en 1 viaje*** con una probabilidad de accidente de ½.

Número de huevos transportados con éxito.

X	**Probabilidad**
12	½
0	½

$E[X] = 12\times½ + 0\times½ = 6$

$E[X^2] = 144\times½ + 0\times½ = 72$

$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 72 - 36 = 36$

Transportando una docena de huevos ***en 2 viajes***.

Número de huevos transportados con éxito en dos viajes

Primer viaje	***Segundo viaje***	***Total (Y)***	***Probabilidad***
6	*6*	*12*	¼
6	*0*	*6*	¼
0	*6*	*6*	¼
0	*0*	*0*	¼

$$E\left[Y\right] = 12\times¼+ 6\times¼+6\times¼+0\times¼ = 6$$

$$E\left[Y^2\right] = 144\times¼+ 36\times¼+36\times¼+0\times¼=54$$

$$V\left(Y\right)=E\left[Y^2\right]-E\left[Y\right]^2=54-36=18$$

Pregunta:

¿Qué pasaría con tres viajes? ¿Cuántos viajes sería conveniente hacer?

Caso 2. Dos negocios con cierto riesgo (Pindyck y Rubinfeld).

	Tiempo caluroso *Probabilidad π = ½*	***Tiempo frío*** *Probabilidad 1−π = ½*
Aire acondicionado	*30.000*	*12.000*
Calefacción	*12.000*	*30.000*

Existe una tercera posibilidad. Dedicar la mitad de los recursos a la venta de cada tipo de electrodoméstico.

	Tiempo caluroso ***Probabilidad π = ½***	***Tiempo frío*** ***Probabilidad π = ½***
Aire acondicionado y calefacción (50% de los recursos)	*15.000 + 6.000 = 21.000*	*6.000 + 15.000 = 21.000*

a. Calcular la *Esperanza* y la *Varianza* de los tres negocios.
b. ¿Por qué se reduce tanto la *Varianza* en el caso de la diversificación?

<u>*Varianza* de la suma de dos variables aleatorias</u>

Calcular la *Covarianza* de la venta de estufas y de aparatos de aire acondicionado.

Análisis de la diversificación.

Caso 1. Activos con rendimientos independientes.

Dos activos con rendimientos modelizados con *2 Variables Aleatorias* ***Independientes*** X_1 y X_2:

$$E[X_1] = E[X_2] = \mu$$

$$V(X_1) = V(X_2) = \sigma^2$$

$$C(X_1, X_2) = 0$$

Los rendimientos se expresan en tanto por uno. Es decir, cuánto se recibe por cada unidad invertida en el activo.

El inversor se muestra indiferente entre ambos activos dada su similitud.

Consideramos ahora una cartera en que se invierte media unidad monetaria en cada activo. El rendimiento de esa cartera se puede representar por la *Variable Aleatoria:*

$$Y = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

$$E[Y] = E\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right] = \frac{1}{2}E[X_1] + \frac{1}{2}E[X_2] = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu$$

$$V(Y) = V\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) = V\left(\frac{1}{2}X_1\right) + V\left(\frac{1}{2}X_2\right) + 2C\left(\frac{1}{2}X_1, \frac{1}{2}X_2\right)$$

$$V(Y) = \frac{1}{4}V(X_1) + \frac{1}{4}V(X_2) + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}C(X_1, X_2)$$

$$V(Y) = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$$

Es decir, la *Cartera Diversificada* tiene el mismo *Rendimiento Esperado* que cada uno de los activos, pero la mitad de *Varianza*.

El resultado depende de la ***Independencia*** de los rendimientos. Es decir, de la ***Covarianza nula*** entre los rendimientos.

Caso 2. Activos con covarianza negativa entre los rendimientos.

El resultado mejora con una covarianza negativa entre los rendimientos.

$$E[X_1] = E[X_2] = \mu$$

$$V(X_1) = V(X_2) = \sigma^2$$

$$C(X_1, X_2) = \sigma_{12} < 0$$

$$V(Y)=\frac{1}{4}V(X_1)+\frac{1}{4}V(X_2)+2\frac{1}{2}\frac{1}{2}C(X_1,X_2)$$
$$V(Y)=\frac{1}{4}\sigma^2+\frac{1}{4}\sigma^2+\frac{1}{2}\sigma_{12}=\frac{1}{2}\left(\sigma^2+\sigma_{12}\right)$$

En este caso, la *Varianza* de la cartera es todavía menor.

2. El seguro.

Se presenta un contrato de seguro en el que el asegurado paga una prima *P* y el seguro le asegura un pago cierto independientemente de las circunstancias.

Demanda de un seguro.

¿Por qué una persona contrata un seguro?

La voluntad de pago viene determinada por la *Aversión al Riesgo*.

Oferta del seguro.

¿Por qué una persona está dispuesta a aceptar un riesgo?

Explicación *1*: *neutralidad ante el Riesgo*.

Explicación *2*: aplicación de la *Ley de los Grandes Números* al trabajar a una escala grande.

Ejemplo numérico de toma de un seguro.

Las *Preferencias* de un agricultor se representan por la *Función de Utilidad*: $U(X)=\sqrt{X}$.

Las cosechas buenas y malas se presentan con igual probabilidad. Por tanto, los pagos y las probabilidades son:

Cosecha	*Pagos*	*Probabilidad*
Mala	$X_1 = 0$	$\Pi_1 = ½$
Buena	$X_2 = 9$	$\Pi_2 = ½$

La *Utilidad Esperada* de la cosecha es: $EU(X)=\sqrt{0}\times\frac{1}{2}+\sqrt{9}\times\frac{1}{2}=1{,}5$.

Contrato de Seguro.

Se le entrega una cantidad de *9* al agricultor si hay mala cosecha. El agricultor paga todos los años una *Prima P*. ¿Cuál será la *Prima P*?

Este *Contrato de Seguro* elimina totalmente el riesgo ya que el agricultor recibe todos los años *9* con independencia del resultado de la cosecha. La *Prima* tiene que tener un valor que haga que la *Utilidad* tras haberla pagado sea mayor que la *Utilidad Esperada* de la situación con riesgo. Es decir:

$$\begin{aligned}&\sqrt{9-P}\geq 1{,}5\\&9-P\geq 2{,}25\\&P\leq 6{,}75\end{aligned}$$

¿Cuál sería el *Beneficio Esperado* de esa empresa de seguros si cobrase una prima de *6,75*?

$$\mathrm{E}[\Pi]=6{,}75\times \tfrac{1}{2}+(6{,}75-9)\times \tfrac{1}{2}=2{,}25.$$

Al utilizar el *Beneficio Esperado* para la compañía de seguros estamos considerando que esa empresa es *Neutral al Riesgo*. Un individuo es *Neutral al Riesgo* si se muestra indiferente entre los rendimientos de una situación con riesgo y el *Valor Esperado* de una situación con riesgo recibido con certeza.

Una alternativa a la *Neutralidad al Riesgo* es que la compañía de seguros trabaja con muchos clientes cuyos riesgos son ***independientes*** entre si. Por tanto, existe relativamente poca *Varianza* alrededor de esta cifra de ganancias media (*Ley de los Grandes Números*). En cierto modo, el riesgo se diluye al asegurar a un número alto de clientes ***independientes***.

El beneficio que produce un cliente se representa por la variable aleatoria Π con *Esperanza* $\mathrm{E}[\Pi]$ y *Varianza* $V(\Pi)$. La *Varianza* mide las desviaciones del beneficio de cada cliente con respecto a la *Esperanza.* Es decir, hay un riesgo asociado a la actividad de seguro determinado por la *Varianza.*

El beneficio de un cliente es relevante si tienes sólo un cliente. Sin embargo, si tienes *N* clientes, la variable relevante es el *Beneficio Medio* por cliente.

El *Beneficio Medio* ***por cliente*** es: $\bar{\Pi}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\Pi_i}{N}$.

La *Esperanza* del *Beneficio medio* **por cliente** es:

$$\mathrm{E}\left[\bar{\Pi}\right] = \mathrm{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}\Pi_i}{N}\right] = \frac{1}{N}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N}\Pi_i\right] = \frac{1}{N}N\mathrm{E}\left[\Pi\right] = \mathrm{E}\left[\Pi\right]$$

La *Varianza* del *Beneficio Medio* es:

$$V\left(\bar{\Pi}\right) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\Pi_i}{N}\right) = \frac{1}{N^2}V\left(\sum_{i=1}^{N}\Pi_i\right) = \frac{1}{N^2}NV\left(\Pi\right) = \frac{V\left(\Pi\right)}{N}$$

<u>Mencionar la importancia de la independencia para el resultado anterior.</u>

Es decir, la *Varianza* del *Beneficio Medio* ***<u>por cliente</u>*** disminuye al aumentar el número de clientes. El *Beneficio Medio* **<u>por cliente</u>**, se acerca al *Beneficio Esperado*.

Si hubiera competencia hay una presión para que el *Beneficio* sea cero. ¿Cuál sería la *Prima de Seguro* que haría que ese *Beneficio Esperado* sea cero?

$P = 4{,}5$

Esta *Prima de Seguro* corresponde con la *Pérdida Esperada*. Es decir, el producto de la pérdida asegurada por la probabilidad.

Una *Prima de Seguro* que coincide con la *Pérdida Esperada* se denomina *Prima Actuarialmente Justa*.

Apéndice *1*

La *Aproximación de Taylor* aproxima una función cualquiera en un punto mediante un polinomio. Se empieza con una función arbitraria y un punto de aproximación:

$$y = f\left(x\right) \quad x = x_0$$

La aproximación mediante un polinomio de segundo orden se puede escribir como:

$$f(x) \approx a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{1}{2}a_2(x - x_0)^2$$

La aproximación y sus derivadas **relevantes** pueden escribirse como:

$$AP(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{1}{2}a_2(x - x_0)^2$$
$$AP'(x) = a_1 + a_2(x - x_0)$$
$$AP'(x) = a_2$$

La aproximación y sus derivadas evaluadas en el punto de aproximación son:

$$AP(x_0) = a_0$$
$$AP'(x_0) = a_1$$
$$AP''(x_0) = a_2$$

Los coeficientes del polinomio se escogen de manera que la aproximación iguale a la función y a sus derivadas en el punto de aproximación x_0. Es decir:

$$AP(x_0) = a_0 = f(x_0)$$
$$AP'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$$
$$AP''(x_0) = a_2 = f''(x_0)$$

Por tanto, la *Aproximación de Taylor* se puede escribir como:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Ejemplo: recta tangente como Aproximación de Taylor de primer orden

La recta tangente a una función en el punto x_0 es una recta que pasa por el punto y tiene la misma pendiente que la función en el punto.

Recta tangente:

$y = ax + b$

La pendiente es la de la función en el punto. Por tanto:

$y = f'(x_0)x + b$

Si la recta pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ se tiene que:

$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente se puede escribir como:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

que coincide con la *Aproximación de Taylor* de primer orden en el punto x_0.

Ejemplo

$$f(x) = \ln x$$

El logaritmo neperiano de *1* es *0*. Una pregunta más complicada es cuál es el logaritmo neperiano de *1,001*. Una aproximación de Taylor permite calcular un valor aproximado. Las derivadas y su evaluación en el punto *1* son:

$$\begin{aligned}
&x_0 = 1 \\
&f(x) = \ln x && \Rightarrow f(1) = 0 \\
&f'(x) = \frac{1}{x} && \Rightarrow f'(1) = 1 \\
&f''(x) = -\frac{1}{x^2} && \Rightarrow f''(1) = -1
\end{aligned}$$

Por tanto, la aproximación por un polinomio de segundo grado es:

$$f(x) \approx (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

El logaritmo neperiano de *1,001* puede aproximarse como:

$$f(1{,}001) \approx 0{,}001 - \frac{1}{2} \times 0{,}001^2 = 0{,}0009995$$

Comprobad el resultado con una calculadora.

Se puede demostrar que la aproximación mejora con el número de términos del polinomio y es mejor cerca del punto de evaluación.

Apéndice 2

Representación analítica de la Prima al Riesgo.

En primer lugar, se aproxima la función de utilidad con un polinomio de segundo orden en el punto *E[X]*.

$$U(X) \approx U(E[X]) + U'(E[X])(X - E[X]) + \frac{1}{2}U''(E[X])(X - E[X])^2$$

Se calcula la esperanza de este objeto:

$$EU(X) \approx U(E[X]) \ + \ \frac{1}{2}U''(E[X])V(X)$$

Se aproxima la utilidad con un polinomio de primer orden (lineal) en el punto *E(X)*:

$$U(X) \ \approx U(E[X]) \ + \ U'(E[X])(X - E[X])$$

Evaluamos la aproximación en el punto *EC*:

$$U(EC) \ \approx U(E[X]) \ + \ U'(E[X])(EC - E[X])$$

Ahora, se usa la definición de *Equivalente Cierto*:

$$U(EC) \ = EU(X)$$

Sustituyendo las funciones por sus aproximaciones de Taylor se tiene que:

$$U(E[X]) \ + \ U'(E[X])(EC - E[X]) \approx U(E[X]) \ + \ \frac{1}{2}U''(E[X])V(X)$$

La *Prima al Riesgo* puede escribirse como:

$$E[X] - EC \approx \ -\frac{1}{2}\frac{U''(E[X])}{U'(E[X])}V(X)$$

$$E[X] - EC \approx \ \frac{1}{2}rV(X)$$

donde, *r* es el *Coeficiente de Aversión al Riesgo* de *Arrow-Pratt:*

$$r = -\frac{U''(E[X])}{U'(E[X])}$$

El coeficiente *r* mide la curvatura de la *Función de Utilidad*. La concavidad será mayor cuanto mayor sea la segunda derivada en valor absoluto (U''). Por tanto, la aversión al riego será mayor cuanto mayor sea la segunda derivada. No obstante, la aversión al riesgo no se puede medir exclusivamente por la segunda derivada ya que la medida dependería de las unidades en que se mida la utilidad. Al dividir por la utilidad marginal desaparecen las unidades de medida de la utilidad.

Apéndice 3.

Probabilidad Condicional y Teorema de Bayes.

	Ojos oscuros	***Ojos claros***	***Total***
Moreno	*30*	*10*	*40*

Rubio	*10*	*10*	*20*
Total	*40*	*20*	*60*

Probabilidades Marginales

$$\mathrm{P}(moreno)=\frac{40}{60}=\frac{2}{3} \quad \mathrm{P}(rubio)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(oscuros)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \quad \mathrm{P}(claros)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

Probabilidades Condicionales

$$\mathrm{P}(oscuros\,|\,moreno)=\frac{30}{40}=\frac{3}{4} \quad \mathrm{P}(claros\,|\,moreno)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(oscuros\,|\,rubio)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2} \qquad \mathrm{P}(claros\,|\,rubio)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(oscuros)=\mathrm{P}(oscuros\,|\,moreno)\times P(moreno)+\mathrm{P}(oscuros\,|\,rubio)\times P(rubio)$$

$$\mathrm{P}(oscuros)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Intuición

$$\mathrm{P}(oscuros\,|\,moreno)=\frac{30}{40}=\frac{\frac{30}{60}}{\frac{40}{60}}=\frac{\mathrm{P}(oscuros\ y\ moreno)}{P(moreno)}$$

Bayes

$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\,|\,B)\times P(B)$$

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B\,|\,A)\times P(A)$$

$$\mathrm{P}(A\,|\,B)\times P(B)=\mathrm{P}(B\,|\,A)\times P(A)$$

$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathrm{P}(B\,|\,A)\times P(A)}{P(B)}$$