TEMA 3

TEORÍA DE JUEGOS Y ESTRATEGIA COMPETITIVA

Revisado en noviembre de *2023*.

The theory constructs a notion of "equilibrium" for which the complex chain of thinking about thinking could converge.
Avinash Dixit.

What Is Game Theory?
A game is being played whenever people have anything to do with each other. Romeo and Juliet played a teenage mating game that didn't work out too well for either of them. Adolf Hitler and Josef Stalin played a game that killed off a substantial fraction of the world's population. Kruschev and Kennedy played a game during the Cuban missile crisis that might have wiped us out altogether. Drivers maneuvering in heavy traffic are playing a game with the drivers of the other cars. Art lovers at an auction are playing a game with the rival bidders for an old master. A firm and a union negotiating next year's wage contract are playing a bargaining game. When the prosecuting and defending attorneys in a murder trial decide what arguments to put before the jury, they are playing a game. A supermarket

manager deciding today's price for frozen pizza is playing a game with all the other storekeepers in the neighborhood with pizza for sale.
If all of these scenarios are games, then game theory obviously has the potential to be immensely important. But game theorists don't claim to have answers to all of the world's problems because the orthodox game theory to which this book is devoted is mostly about what happens when people interact in a rational manner. So it can't predict the behavior of love-sick teenagers like Romeo or Juliet or madmen like Hitler or Stalin. However, people don't always behave irrationally, and so it isn't a waste of time to study what happens when we are all wearing our thinking caps. Most of us at least try to spend our money sensibly—and we don't do too badly much of the time; otherwise, economic theory wouldn't work at all.
Ken Binmore, Playing for Real.

Compartiendo piso.
Tres amigos deciden compartir piso. El piso cuesta *900* euros al mes. El piso tiene tres dormitorios. El primer dormitorio tiene buenas vistas, el segundo es más grande que los otros y el tercero es interior. ¿Cómo repartirán la renta del piso?

Sugerencia relacionada con Teoría de Juegos.
Cada individuo hace una puja en sobre cerrado por cada una de las habitaciones. La suma de las pujas de cada individuo tiene que ser igual al total del alquiler.
Cada dormitorio se le asigna al individuo que haya hecho la puja más alta por ese dormitorio. Cada individuo pagará de alquiler, la media de las pujas de los tres amigos por cada dormitorio.
La siguiente tabla muestra el resumen de las pujas y el alquiler que tiene que pagar a quién se le adjudique cada dormitorio.

		Individuo			
		1	*2*	*3*	**Media pujas**
Dormitorio	**Vistas**	*400*	*300*	*320*	*340*
	Grande	*300*	*400*	*320*	*340*
	Interior	*200*	*200*	*260*	*220*
	Suma	*900*	*900*	*900*	*900*

- Efectos de incrementar la puja por tu dormitorio preferido.
- Interacciones estratégicas. ¿Cómo están pujando tus amigos?

3.1. Teoría de juegos y decisiones estratégicas

Leer Página *550* de *Pindyck y Rubinfeld*.

La *Teoría de Juegos* analiza complejas *Situaciones Estratégicas* en un contexto muy simplificado y estilizado.
En estas *Situaciones Estratégicas*, el resultado depende del comportamiento del individuo analizado y del comportamiento del resto de los individuos que participan en la situación.

Juegos Cooperativos y Juegos No Cooperativos.
En los *Juegos Cooperativos* se analizan coaliciones con acuerdos de obligado cumplimiento. La coalición consigue unos resultados que conviene a cada uno de los miembros.

Un ejemplo de Juego Cooperativo: el juego del helado.
Hay tres niños que disponen de una cantidad de dinero cada uno.

A	***B***	***C***
6 €	*4 €*	*3 €*

En la tienda hay tres formatos de tarros de helado.

Tipo	***Peso***	***Precio***
1	*500 grs.*	*7 €.*
2	*750 grs.*	*9 €*
3	*1000 grs.*	*11 €.*

Coaliciones:

{ Ø }, { A }, { B }, { C }, { A, B }, { A, C }, { B, C }, { A, B, C }.

Pagos asociados a cada coalcción:

V({ Ø }) = V({ A }) = V({ B })= V({ C }) = 0.

V({ A, B }) = 750. V({ A, C }) = 750. V({ B, C }) = 500. V({ A, B, C }) = 1.000.

En este curso se estudian ***Juegos No Cooperativos***.

Elementos básicos de un Juego.

1. *Jugadores* (*A* y *B*).

Se supone que eligen el curso de acción que genera el resultado más favorable para ellos.

Son *Jugadores Racionales* en el sentido de que piensan las consecuencias de sus acciones.

2. *Estrategias* (*a* y *b*).

Regla o ***plan*** de acción para jugar. Es importante distinguir ***Estrategia*** de ***Acción*** o jugada.

Ejemplo de Estrategia:

Si mi competidor vende por debajo de un precio yo no entro, si sube el precio entro, si …

3. Pagos.

Los *Pagos* que recibe cada *Jugador* son función de sus propias *Estrategias* y de las *Estrategias* del otro *Jugador*.

$$\Pi_A(a,b) \quad \Pi_B(a,b).$$

Representación de un Juego.

Planteamos la representación del *Juego* conocido como *Dilema del Prisionero*.

Descripción del Juego.

La policía tiene evidencia suficiente para acusar a dos delincuentes por un delito menor. Sin embargo, ambos son sospechosos de un delito más grave.

La pena por el delito menor es de *2* años de cárcel.

La pena por el delito grave es de *10* años.

Sin una delación sólo se les puede acusar a ambos a *2* años por el delito menor.

A cada uno de los delincuentes, **por separado**, se le ofrece el siguiente trato:

Si nos proporcionas evidencia sobre los delitos de tu compañero te reduciremos la pena de cualquier delito del que te acusemos. De *2* a *1* año por el delito menor. De *10* a *8* años por el delito grave.

Representación del Juego en Forma Normal.

		Jugador B	
		"delata"	*"no delata"*
Jugador A	*"delata"*	*−8, −8*	*−1, −10*
	"no delata"	*−10, −1*	*−2, −2*

Representación del juego en Forma Extensiva

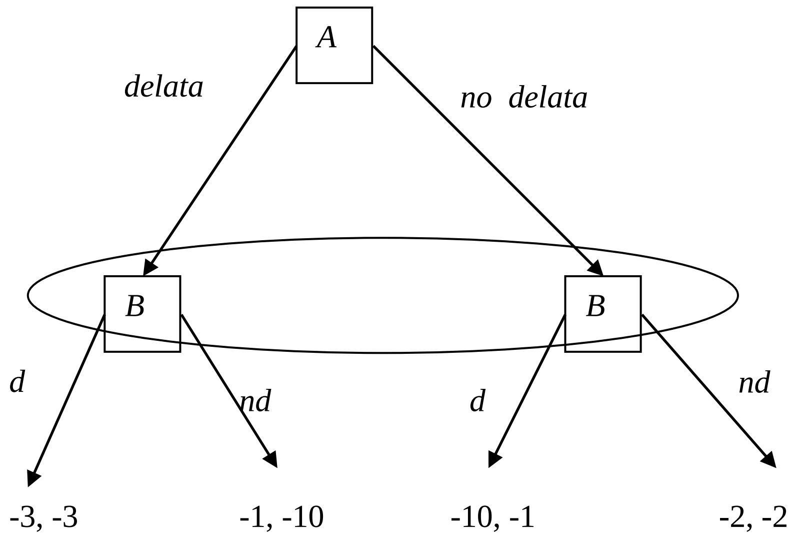


Ilustración con un vídeo.

Un concurso en el Reino Unido (Golden Balls).

Ideas importantes.

- Es necesario comprender el punto de vista del adversario y deducir cómo responderá probablemente a nuestros actos.
- Se busca la conducta óptima de un jugador suponiendo que el otro también busca esa conducta óptima.

3.2. Equilibrio de Nash.

Concepto de Equilibrio (¡Otra vez!)

Equilibrio: una situación en la que los individuos no tienen incentivos para cambiar su decisión.

El *Equilibrio de Nash* es una **solución general** para el concepto de *Equilibrio* en *Juegos*. Empezamos explorando dos casos simplificados de *Equilibrio*.

Equilibrio en Estrategias Dominantes.

La *Estrategia* del *Jugador A* es una *Estrategia Dominante* si la elección del *Jugador A* es óptima para cualquier elección del *Jugador B*. La *Estrategia* del *Jugador B* es una *Estrategia Dominante* si la elección del *Jugador B* es óptima para cualquier elección del *Jugador A*.

		Jugador B	
		izquierda	*derecha*
Jugador A	*arriba*	*1, 2 ✓*	*0, 1*
	abajo	*✓2, 1 ✓*	*✓1, 0*

"abajo" es una *Estrategia Dominante* para el jugador *A*.
"izquierda" es una *Estrategia Dominante* para el jugador *B*.
Cuando existen *Estrategias Dominantes*, es fácil predecir las jugadas y los pagos finales.

No siempre existe una *Estrategia Dominante*. Por ejemplo:

		Jugador *B*	
		izquierda	***derecha***
Jugador *A*	***arriba***	✓2, 1 ✓	0, 0
	abajo	0, 0	✓1, 2 ✓

Ejercicio.

En el siguiente juego representado en forma normal

		Jugador B		
		L	***M***	***R***
Jugador A	***U***	*4,3*	*2,8*	*4,4*
	M	*2,2*	*3,3*	*2,2*
	D	*5,1*	*4,3*	*3,4*

a. Buscar *Estrategias Dominantes*.
b. Buscar *Estrategias Dominadas*.
c. Buscar *Equilibrios de Nash*.

Equilibrio de Nash.

Dos *Estrategias* (a^*, b^*) constituyen un *Equilibrio de Nash* si a^* es la mejor *Estrategia* posible del *Jugador A* cuando *B* juega b^* y b^* es la mejor *Estrategia* para el *Jugador B* cuando el *Jugador A* juega a^*.

Ejemplos.

Ejemplo *1*: conducir por la derecha de la carretera o conducir por la izquierda.

		Conductor B	
		izquierda	***derecha***
Conductor A	***izquierda***	*✓0, 0 ✓*	*−1, −1*
	derecha	*−1, −1*	*✓0, 0✓*

Comentarios.

- La ley estipula el lado de la carretera en que debes conducir. ¿Puede estipular algo diferente? ¿Puede estipular un comportamiento que no coincida con un *Equilibrio de Nash*?
- Suecia cambió el lado de la carretera por la que conduce. Fecha *3* de septiembre de *1.967*. Referéndum negativo *16* de octubre de *1.955*.

Ejemplo *2*: el *Juego de La Coordinación*.

		Acero	
		No invertir (0)	***Invertir (1)***
Astillero	***No invertir (0)***	*✓0, 0 ✓*	*0, −1*
	Invertir (1)	*−1, 0*	*✓2, 2✓*

Este *Juego* se menciona en el libro *Economics Rules* de *Dani Rodrik*. Se trata de un juego con implicaciones en *Política Industrial*. El resultado de este juego depende del hecho de que no es posible invertir pequeñas cantidades en ninguno de los dos negocios: acero y construcción de barcos. Si se invierte, es necesario invertir *1* unidad. Sin embargo, la inversión no conduce a nada si no se produce a la vez en las dos industrias. El astillero no puede operar sin acero y la acería no tiene clientes si no se construyen barcos. Estas circunstancias se representan en la matriz de pagos anterior.

Sugerencia: pensar sobre los dos equilibrios posibles.

- ¿Tienen el mismo impacto en el bienestar?
- ¿Se podría favorecer uno de los equilibrios?

El concepto de *Equilibrio de Nash* presenta los siguientes problemas:
1. Puede haber más de un *Equilibrio de Nash*.
2. En ocasiones no hay un *Equilibrio de Nash* en *Estrategias Puras*.

Ejemplo de Juego sin Equilibrio de Nash en <u>Estrategias Puras</u>.

		Jugador *B*	
		izquierda	***derecha***
Jugador *A*	***arriba***	*0, 0* ✓	✓*0, -1*
	abajo	✓*1, 0*	*-1, 3* ✓

No hay ninguna casilla con dos marcas. Por lo tanto, no existe *Equilibrio de Nash* en *Estrategias Puras*.

Ejemplo de Equilibrios de Nash Múltiples: la "Guerra de las Parejas"

		Jugador B	
		boxeo	*ballet*
Jugador *A*	*boxeo*	✓*10, 5* ✓	*4, 4*
	ballet	*0, 0*	✓*5, 10* ✓

Situaciones no eficientes desde el punto de vista de Pareto: el Dilema del Prisionero.

Recordad la definición de *Óptimo de Pareto*.

En el *Dilema del Prisionero*, se podría mejorar la situación de ambos *Jugadores* mediante la colaboración.

		Prisionero *B*	
		Delatar	***No delatar***
Prisionero *A*	***Delatar***	*✓−8, −8 ✓*	*✓−1, −10*
	No delatar	*−10, −1 ✓*	*−2, −2*

Un listado de reflexiones sobre la colaboración o su ausencia:

1. Confesar es una *Estrategia Dominante*.
2. Podían mejorar si cooperasen. (*no delatar, no delatar*) con respecto a (*delatar, delatar*) es una situación en la que cada jugador mejora sin que empeore el otro. Por tanto, (*delatar, delatar*) no es un *Óptimo De Pareto*.
3. Los individuos irán a la cárcel.
4. El juez (la policía) diseña este mecanismo.
5. La sociedad (la policía o el juez) tiene que "gastar" para encarcelarlos. Al diseñador del mecanismo, le gustaría que estuviesen *10* años en la cárcel, pero tiene que bajar la condena a *8* años para proporcionales un incentivo a delatar al compañero. Como veremos en otras ocasiones en esta clase, es costoso que un individuo revele información.
6. Una posible explicación para la no cooperación es que el juego ***no se repite***.

Algunos ejemplos del dilema del prisionero que conducen a una asignación no optima (no paretiana) de los recursos.

1. Consumo Ostentoso.

La utilidad de tener un coche depende negativamente del precio del propio coche (P_c) y positivamente de la diferencia de precio entre tu coche y el del vecino ($P_c - P_v$).

$$U(P_c, P_v) = 11 - P_c + 2(P_c - P_v)$$
$$U(P_c, P_v) = 11 + P_c - 2P_v$$

El precio de un Citroen es *3* y el de un Mercedes *5*. Se pueden dar los siguientes casos:

- La utilidad de tener un Citroen cuando tu vecino tiene un Citroen es $U(3,3) = 8$
- La utilidad de tener un Citroen cuando tu vecino tiene un Mercedes es $U(3,5) = 4$
- La utilidad de tener un Mercedes cuando tu vecino tiene un Mercedes es$U(5,5) = 6$
- La utilidad de tener un Mercedes cuando tu vecino tiene un Citroen es $U(5,3) = 10$

La situación se puede representar mediante el siguiente *Juego* en *Forma Normal*:

		Consumidor **B**	
		Citroen	*Mercedes*
Consumidor *A*	*Citroen*	*8, 8*	*4, 10* ✓
	Mercedes	✓*10, 4*	✓*6, 6* ✓

Se trata de un *Dilema del Prisionero*. La *Estrategia Dominante* es comprar un Mercedes. Como consecuencia, ambos lo compran y tienen un nivel de bienestar menor que si los dos hubiesen comprado un Citroen.

Otros ejemplos similares son el dopaje en deportes o incluso la cirugía plástica para triunfar en algunas actividades.

2. Horarios Comerciales.

En un mercado con *2* establecimientos se venden *480* unidades diarias. El coste de apertura es de *5* unidades por hora. Las ventas se reparten en proporción a las horas que permanecen abiertos ambos establecimientos.

Caso 1. Ambos establecimientos abren 8 horas.

Establecimiento	***Horas***	***Ventas***	***Costes***	***Beneficios***
1	*8*	*240*	$5 \times 8 = 40$	*200*
2	*8*	*240*	$5 \times 8 = 40$	*200*

Caso 2. Un establecimiento abre 24 horas mientras el otro continúa abriendo 8 horas.

Establecimiento	**Horas**	**Ventas**	**Costes**	**Beneficios**
1	*24*	*360*	$5 \times 24 = 120$	*240*
2	*8*	*120*	$5 \times 8 = 40$	*80*

Caso 3. Ambos establecimientos abren 24 horas.

Establecimiento	***Horas***	***Ventas***	***Costes***	***Beneficios***
1	*24*	*240*	$5 \times 24 = 120$	*120*
2	*24*	*240*	$5 \times 24 = 120$	*120*

Los resultados pueden representarse como el siguiente juego en *Forma Normal*:

		Tienda B	
		8h	*24h*
Tienda A	*8h*	*200, 200*	*80, 240* ✓
	24h	✓*240, 80*	✓*120, 120* ✓

Abrir *24* horas diarias es una *Estrategia Dominante*. Los establecimientos pueden ganar con un acuerdo de apertura limitada. Si no son capaces de conseguir este acuerdo es posible que pidan una ley restrictiva de los horarios comerciales.

3. *La Paradoja de Hotelling.*

Una ciudad costera concede licencia a dos vendedores en una playa que tiene *1* km de longitud. Los bañistas se distribuyen de forma uniforme por la arena. Por tanto, la localización óptima de los vendedores para servir a los bañistas es en el punto *0,25 km* y *0,75 km* respectivamente. Con esa distribución, cada uno tiene acceso a la mitad de los clientes. Es decir, un pago (**cuota de mercado**) de (*0,5, 0,5*). Si uno de ellos se mueve hacia el centro de la playa sin que el otro cambie su localización su pago será *0,5* por un lado y *0,125* por el otro (la mitad de un cuarto). Es decir, acudirán a él los bañistas que estén más cerca. Si ambos se mueven al centro de la playa volverán a tener la mitad de clientes cada uno, pero a costa de que los bañistas tengan que caminar más. La situación se puede representar en el siguiente *Juego* en *Forma Normal*.

		Vendedor 2	
		0,75 km	***0,5 km***
Vendedor 1	***0,25 km***	*0,5, 0,5*	*0,375, 0,675* ✓
	0,5 km	✓*0,625, 0,375*	✓*0,5, 0,5* ✓

4. *Publicidad.*

Dos empresas tienen que decidir si hacen publicidad con un coste de *1*. En la situación inicial sin publicidad ambas empresas venden *2* unidades. Si una empresa hace publicidad y su competidora no, le arrebata todos sus clientes. Por tanto, vende *4* unidades y gasta *1* en publicidad. Es decir, tiene un pago de *3*. Si ambas hacen publicidad, vuelven a las ventas originales. La situación se puede representar en el siguiente juego en forma normal.

		Empresa B	
		Sin publicidad	***Publicidad***
Empresa A	***Sin publicidad***	*2, 2*	*0, 3* ✓
	Publicidad	✓*3, 0*	✓*1, 1*✓

5. *Gestión de un Recurso Común.*

The Tragedy of the Commons.

Author(s): Garrett Hardin

Source: Science, New Series, Vol. 162, No. 3859 (Dec. 13, 1968), pp. 1243-1248.

Dos ganaderos tienen que decidir el número de vacas que ponen a pastar en una pradera de propiedad común. La *Función de Producción* de la pradera es: $y = 60v - \frac{1}{2}v^2$.

Donde y es la producción obtenida por el rebaño y v el número de vacas (tamaño del rebaño). La *Función de Producción* presenta *Rendimientos Marginales Decrecientes* (*Producto Marginal Decreciente* del *Factor de Producción* vaca). Es decir, cada vaca que se añade al rebaño aumenta la producción, pero cada vaca que se añade aumenta la producción menos que la anterior ***al tener que compartir el mismo pasto que antes de añadir esa vaca***.

a. Calcula el número de vacas y la producción si los ganaderos se ponen de acuerdo para maximizar la producción.

   $y' = 60 - v = 0 \Rightarrow v = 60$.

Se trata de un máximo ya que la segunda derivada es negativa.

La producción será: $y = 60 \times 60 - \frac{1}{2}60^2 = 1800$.

Es decir, cada ganadero podrá llevar *30* vacas. La producción se distribuye, de forma natural, de acuerdo al tamaño del rebaño de cada ganadero. En este caso, cada ganadero tendrá una producción de *900*.

b. Calcular el efecto de que un ganadero decida llevar *32* vacas mientras el otro cumple con el acuerdo.

El rebaño será de *62* vacas. La producción es:

$y = 60 \times 62 - \frac{1}{2}62^2 = 1798$.

La producción que le corresponde a cada uno es:

$$y_1 = \frac{1798}{62} \times 30 = 870$$

$$y_1 = \frac{1798}{62} \times 32 = 928$$

De nuevo, la producción se divide en proporción al número de vacas de cada ganadero.

c. Calcular el efecto de que ambos ganaderos lleven *32* vacas a la pradera.

El rebaño será de *64* vacas.

$$y = 60 \times 64 - \frac{1}{2} 64^2 = 1792$$

La producción de cada ganadero será:

$$y_1 = \frac{1792}{64} \times 32 = 896$$

$$y_1 = \frac{1792}{64} \times 32 = 896$$

d. Representa el resultado como un *Juego* en *Forma Normal*.

		Ganadero *2*	
		30	*32*
Ganadero *1*	*30*	*900, 900*	*870, 928*
	32	*928, 870*	*896, 896*

e. ¿Cuántas vacas pondrá cada uno en la pradera?

Función de Producción del ganadero *1*.

$$y_1 = \frac{y}{v} v_1$$

$$y_1 = \frac{60v - \frac{1}{2}v^2}{v} v_1$$

$$y_1 = \left(60 - \frac{1}{2}v\right) v_1$$

$$y_1 = \left(60 - \frac{1}{2}\left(v_1 + v_2\right)\right) v_1$$

La *Función de Producción* recoge la idea de que la producción depende de la decisión del ganadero *1* pero también de la decisión del ganadero *2*.

Derivando con respecto al número de vacas del ganadero *1* se tiene que:

$$\frac{\partial y_1}{\partial v_1} = -\frac{1}{2}v_1 + \left(60 - \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\right) = 0$$

$$-\frac{1}{2}v_1 + 60 - \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 = 0$$

$$v_1 = 60 - \frac{1}{2}v_2$$

Esta expresión proporciona el número óptimo de vacas del ganadero *1* dado el número de vacas del ganadero *2*. El ejercicio es simétrico para el ganadero *2*. El número de vacas de ambos ganaderos es el resultado de resolver el sistema de ecuaciones:

$$v_1 = 60 - \frac{1}{2}v_2$$

$$v_2 = 60 - \frac{1}{2}v_1$$

Las soluciones son:

$$v_1 = v_2 = 40$$

$$v = 80$$

$$y = 60 \times 80 - \frac{1}{2} \times 80^2 = 1600$$

$$y_1 = y_2 = 800$$

La tragedia de los Comunes se puede representar en el siguiente *Juego en Forma Normal*:

		Ganadero *2*	
		30	*40*
Ganadero *1*	*30*	*900, 900*	*750, 1000*
	40	*1000, 750*	*800, 800*

5. Análisis del duopolio.

Función de *Demanda de Mercado*: $P = 100 - Q$.

Función de Costes: $C(q) = 10q$.

Solución Colusiva.

Las empresas producen la cantidad que maximizaría su beneficio conjunto y hacen un reparto de esa cantidad entre ellos. Esa cantidad será el resultado de maximizar: $\Pi = (100 - Q)Q - 10Q$.

La condición de primer orden de maximización es:

$$\Pi' = 100 - 2Q - 10 = 0 \Rightarrow Q = 45 \Rightarrow P = 100 - 45 = 55.$$

Las cantidades producidas y los beneficios serán:

$$q_1 = q_2 = \frac{45}{2}$$

$$\Pi_1 = \Pi_2 = 55 \times \frac{45}{2} - 10 \times \frac{45}{2} = 1012{,}5$$

Engañar cuando el otro jugador cumple el Acuerdo Colusivo.

El alto precio de la *Solución Colusiva* hace que los productores tengan incentivos para producir más de la cuota asignada ($q_1 = q_2 = \frac{45}{2}$). De hecho, el beneficio de cada productor condicional en que el otro productor respete la cuota se maximiza produciendo una cantidad superior. Es decir:

$$\Pi_1 = \left(100 - q_1 - \frac{45}{2}\right)q_1 - 10q_1 = \left(\frac{155}{2} - q_1\right)q_1 - 10q_1$$

La condición de maximización del beneficio se puede escribir como:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \frac{155}{2} - 2q_1 - 10 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{135}{4} > \frac{45}{2}$$

El precio de mercado sería:

$$P = 100 - \frac{45}{2} - \frac{135}{4} = \frac{175}{4}$$

Por tanto, los beneficios serían:

$$\Pi_1 = \frac{175}{4} \times \frac{135}{4} - 10 \times \frac{135}{4} = 1139{,}06$$

$$\Pi_2 = \frac{175}{4} \times \frac{90}{4} - 10 \times \frac{90}{4} = 759{,}37$$

Engañar siendo consciente de que el otro productor no cumple el Acuerdo Colusivo (Equilibrio de Cournot).

En este caso, la empresa *1* produce la cantidad que maximiza su beneficio dada la cantidad que produce la *2*. La *2* hace lo mismo. La solución conjunta a estas dos decisiones constituye un *Equilibrio de Cournot*.

El beneficio de la empresa *1* se escribe como:

$$\Pi_1 = (100 - q_1 - q_2)q_1 - 10q_1$$

La condición de primer orden de este problema de optimización es:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 100 - q_1 - q_2 - q_1 - 10 = 0$$

$$q_1 = 45 - \frac{1}{2}q_2$$

La solución matemática del *Modelo de Cournot* es equivalente a la solución de los *Juegos en Forma Normal* realizada hasta ahora. Es decir, poner marcas en la mejor decisión para un individuo dada la decisión del otro.

Por simetría, la repetición del proceso para la segunda empresa daría como resultado:

$$q_2 = 45 - \frac{1}{2}q_1$$

A continuación, es necesario buscar las cantidades que sean ***simultáneamente óptimas*** (***mutuamente compatibles***). La solución resulta de resolver el sistema de ecuaciones anterior:

$$q_1 = q_2 = 30$$
$$\Pi_1 = \Pi_2 = 900$$

Esta solución es un *Equilibrio de Nash*. De hecho, representa la mejor *Estrategia* de la empresa *1* dado lo que hace la empresa *2* y la mejor *Estrategia* de la empresa *2* dado lo que hace el productor *1*.

La representación del *Juego en Forma Normal* sería:

		Empresa 2	
		colusión	***engaño***
Empresa 1	***colusión***	*1012, 1012*	*759, 1139* ✓
	engaño	✓*1139, 759*	✓*900, 900* ✓

El engaño es una *Estrategia Dominante* para ambas empresa. Por tanto, bajo las condiciones en que se define este *Juego*, no va a tener lugar un *Acuerdo Colusivo*. Como se verá más adelante, el *Acuerdo Colusivo* puede ocurrir cuando el *Juego* **se repite de forma indefinida**.

Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas.

Cada *Jugador* elige la frecuencia óptima con la que seguirá una *Estrategia* dada la frecuencia con la que elija el otro. Se puede demostrar que, bajo ciertas condiciones, siempre existe un *Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas*.

		Jugador *B*	
		***izquierda** (q)*	***derecha** (1−q)*
Jugador *A*	***arriba** (p)*	*0, 0*	*0, −1*
	***abajo** (1−p)*	*1, 0*	*−1, 3*

El *Beneficio Esperado* de cada estrategia y el *Beneficio Esperado* para el *Jugador A* se pueden escribir como:

$$E\left[\Pi_A \mid arriba\right] = 0q + 0(1-q) = 0$$
$$E\left[\Pi_A \mid abajo\right] = 1q - 1(1-q) = 2q - 1$$
$$E\left[\Pi_A\right] = E\left[\Pi_A \mid arriba\right]p + E\left[\Pi_A \mid abajo\right](1-p)$$
$$E\left[\Pi_A\right] = 0p + (2q-1)(1-p)$$

El *Jugador A* elige p de modo que maximice $E\left[\Pi_A\right]$. Es decir:

$$\max_p E\left[\Pi_A\right] = (2q-1)(1-p)$$
$$st \quad 0 \le p \le 1$$

Las probabilidades óptimas en función de q son las siguientes:

$$q > \frac{1}{2} \Rightarrow p = 0 \quad q = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le p \le 1 \quad q < \frac{1}{2} \Rightarrow p = 1 .$$

El *Beneficio Esperado* de cada estrategia y el *Beneficio Esperado* para el *Jugador B* se expresan como:

$$\begin{aligned}
&E\left[\Pi_B \mid izquierda\right] = 0p + 0(1-p) = 0 \\
&E\left[\Pi_B \mid derecha\right] = -1p + 3(1-p) = 3-4p \\
&E\left[\Pi_B\right] = E\left[\Pi_B \mid izquierda\right]q + E\left[\Pi_B \mid derecha\right](1-q) \\
&E\left[\Pi_B\right] = 0q + (3-4p)(1-q) = (3-4p)(1-q)
\end{aligned}$$

El *Jugador B* elige *q* de modo que maximice $E\left[\Pi_B\right]$. Es decir:

$$\begin{aligned}
&\max_q E\left[\Pi_B\right] = (3-4p)(1-q) \\
&st \quad 0 \le q \le 1
\end{aligned}$$

Las probabilidades óptimas en función de *p* son las siguientes:

$$p < \frac{3}{4} \Rightarrow q = 0 \quad p = \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \le q \le 1 \quad p > \frac{3}{4} \Rightarrow q = 1 .$$

Las dos probabilidades mutuamente consistentes son:

$$p = \frac{3}{4} \ , \ q = \frac{1}{2} .$$

Aspecto clave: probar con $p \ne \frac{3}{4}$ o con $q \ne \frac{1}{2}$.

Ejemplo de Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas.

Un guardia y un ladrón juegan este *Juego* todas las noches en el edificio de la Facultad. Si el ladrón va a un lugar distinto del guardia consigue un botín y el guardia es despedido. Si coinciden en el mismo lugar, el ladrón va a la cárcel. Representamos el *Juego* en *Forma Normal* como:

		Guardia	
		aulario (q)	***oficinas (1-q)***
Ladrón	***aulario (p)***	*−10, 0 ✓*	*✓10, −10*
	oficinas (1-p)	*✓10, −10*	*−10, 0 ✓*

No hay *Equilibrio de Nash* en *Estrategias Puras* ya que no coinciden dos marcas en la misma celda.

El *Beneficio Esperado* de cada *Estrategia* y el *Beneficio Esperado* para el ladrón se expresan como:

$$E\left[\Pi_L \mid aulario\right] = -10q + 10(1-q) = 10 - 20q$$
$$E\left[\Pi_L \mid oficinas\right] = 10q - 10(1-q) = 20q - 10$$
$$E\left[\Pi_L\right] = (10-20q)p + (20q-10)(1-p)$$
$$E\left[\Pi_L\right] = (20q-10)(1-2p)$$

Las probabilidades óptimas en función de q son las siguientes:

$$q < \frac{1}{2} \Rightarrow p = 1 \quad q = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le p \le 1 \quad q > \frac{1}{2} \Rightarrow p = 0\,.$$

El *Beneficio Esperado* de cada estrategia y el *Beneficio Esperado* para el guardia se expresan como:

$$E\left[\Pi_G \mid aulario\right] = -0p - 10(1-p) = 10p - 10$$
$$E\left[\Pi_G \mid oficinas\right] = -10p + 0(1-p) = -10p$$
$$E\left[\Pi_G\right] = (10p-10)q - 10p(1-q)$$
$$E\left[\Pi_G\right] = -10p + (20p-10)q$$

Las probabilidades óptimas en función de p son las siguientes:

$$p > \frac{1}{2} \Rightarrow q = 1 \quad p = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le q \le 1 \quad p < \frac{1}{2} \Rightarrow q = 0$$

Las dos probabilidades mutuamente consistentes son:

$$p = \frac{1}{2}\ ,\ q = \frac{1}{2}\,.$$

Aspecto clave: probar con $p \ne \frac{1}{2}$ o con $q \ne \frac{1}{2}$.

3.3. Juegos repetidos

Juegos Repetidos.

En este epígrafe se analiza en qué medida la repetición de un *Juego* favorece la colaboración en el *Dilema del Prisionero*.

Definiciones.

Juego Base: el *Juego* que tiene lugar en cada periodo.

Superjuego: el *Juego* compuesto por todos los periodos.

Juegos Repetidos un número finito de periodos.

Dilema del Prisionero en dos etapas.

		Jugador 2	
		i	*d*
Jugador 1	*a*	✓*1, 1* ✓	✓*5, 0*
	b	*0, 5* ✓	*4, 4*

Esta es la *Representación Normal* del *Juego Base*. El *Superjuego* está compuesto por todos los periodos en que ocurre. En este caso, el juego ocurre en dos periodos.

Solución Recursiva: se analiza desde ***el final hacia el principio***.
En ***el segundo periodo***, se trata de un *Juego* que se juega una vez. Incluso si hay cientos de periodos, el *Juego* en el último periodo es un *Juego* de un único periodo. Por tanto, se resuelve el *Juego* del modo en que se analizó previamente. Es decir, hay un *Equilibrio de Nash* (*a, i*).
El ***primer periodo*** se representa sumando a la matriz de pagos el resultado del segundo periodo. Es decir:

		Jugador 2	
		i	*d*
Jugador 1	*a*	✓*2, 2* ✓	✓*6, 1*
	b	*1, 6* ✓	*5, 5*

De nuevo, en el primer periodo el *Equilibrio de Nash* es (*a, i*). Por tanto, un *Juego* de dos periodos no aumenta las posibilidades de colaboración.

Juegos Repetidos infinitamente.

En primer lugar, es necesario tener en cuenta el efecto del tiempo en los pagos del *Juego*.

Concepto de Descuento.

Es el modo en que se representan las *Preferencias sobre los Pagos Futuros* en el modelo.

x unidades monetarias de hoy equivalen a $x\,(1 + r)$ en un periodo futuro ($r > 0$). Se trata de una compensación por retrasar el consumo. Por tanto, x unidades de un periodo futuro equivalen a $\frac{x}{1+r}$ unidades hoy. Donde, $\delta = \frac{1}{1+r}$ se denomina *Factor de Descuento*. El *Factor de Descuento* (δ) mide el valor **actual** de una unidad monetaria recibida en el próximo periodo. El factor de descuento está comprendido entre *0* y *1* $(0 \le \delta \le 1)$.

Valor descontando de una renta infinita de una unidad.

$$V = 1 + \delta + \delta^2 + \cdots + \delta^{n-1} + \delta^n$$
$$\delta V = \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots + \delta^n + \delta^{n+1}$$
$$(1-\delta)V = 1 - \delta^{n+1}$$
$$V = \frac{1-\delta^{n+1}}{1-\delta}$$
$$\lim_{n\to+\infty} V = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\delta^{n+1}}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta}$$

Ejemplo de Juegos Repetido Infinitamente.

		Jugador *2*	
		l	*r*
Jugador *1*	*l*	✓*1, 1* ✓	✓*5, 0*
	r	*0, 5* ✓	*4, 4*

(*l, l*) es el *Equilibrio de Nash* en el *Juego base*.

(*l, l*) es ***<u>también</u>*** un *Equilibrio de Nash* en el *Superjuego*. No es difícil imaginar a dos jugadores jugando de ese modo indefinidamente.

Novedad con respecto al Juego repetido un número finito de periodos.

En el *Juego* con infinitos periodos puede haber cooperación en todas las etapas. Es decir, existe un *Equilibrio de Nash* en el S*uperjuego* que produce el pago (*4, 4*) en todos los periodos.

Estrategia de cada jugador para un Equilibrio de Nash que implique colaboración indefinida:

En la jugada *t*, juega *r* ***si*** se ha producido ***colaboración*** (*r, r*) en las $t - 1$ jugadas anteriores. ***En caso contrario***, juega *l* ***para siempre***.

Esta *Estrategia* es un ejemplo de las denominadas *Estrategias* de "*gatillo*". El jugador coopera hasta que alguien no coopera. A partir de ese momento, no vuelve a cooperar.

Comentarios.

1. Si ambos jugadores adoptan esta estrategia, el resultado observado será (*r, r*) en todas las jugadas. Es decir, colaboración.
2. Para ciertos valores del factor de descuento (δ) esta ***Estrategia*** es un *Equilibrio de Nash* en el *Juego* repetido infinitamente.
3. Si un jugador juega *l* tras haber observado una "no cooperación", la mejor respuesta del otro jugador es jugar *l*. Luego, esa parte del juego es un *Equilibrio de Nash*. **Es decir, el castigo es un *Equilibrio de Nash***.

Analizamos ahora la mejor respuesta de un jugador cuando anteriormente se ha observado cooperación (*r, r*).

Pago por jugar *l* (no cooperar): $5+\delta\frac{1}{1-\delta}$.

Recibe *5* unidades en el periodo por engañar. En el futuro recibirá un pago de *1* porque el otro jugador no vuelve a colaborar. Por tanto, recibe el valor descontado de un pago de *1* en todos los periodos futuros empezando en el siguiente (**para siempre**).

Pago por jugar *r* (cooperar): $\frac{4}{1-\delta}$. Es decir, el valor descontado de un pago de *4* en todos los periodos futuros. Se jugará *r* si:

$$\frac{4}{1-\delta} > 5 + \delta \frac{1}{1-\delta}$$
$$4 > 5(1-\delta) + \delta$$
$$4 > 5 - 5\delta + \delta$$
$$4\delta > 1$$
$$\delta > \frac{1}{4}$$

En este caso, la estrategia analizada es un *Equilibrio de Nash* ***en el Superjuego*** ya que jugar *r* es la mejor estrategia para ambos jugadores ***en todos*** los periodos.

Este resultado es bastante intuitivo. Un valor elevado de δ representa a un individuo que valora mucho el futuro. Si se valora mucho el futuro, no interesa la ganancia instantánea del engaño cuando se compara con una perdida futura derivada del castigo.

Colusión como Juego Repetido.

		Productor *2*	
		colusión	*engaño*
Productor *1*	*colusión*	*1012, 1012*	*759, 1139* ✓
	engaño	✓*1139, 759*	✓*900, 900* ✓

Estrategia del "gatillo".

Coludir hasta que un jugador no coopere. Si un jugador no coopera, pasar a *Cournot* ***para siempre***.

Pago de la colusión: $\frac{1012}{1-\delta}$.

Pago del engaño: $1139 + \delta \frac{900}{1-\delta}$.

Se coopera en todos los periodos si:

$$\frac{1012}{1-\delta} > 1139 + \delta \frac{900}{1-\delta}$$
$$1012 > 1139 - 1139\delta + 900\delta$$
$$239\delta > 127$$
$$\delta > 0{,}53$$

La posibilidad de la *Colusión* depende del grado de impaciencia de los individuos (δ) y del pago de engañar.

3.4. Juegos Consecutivos.

Juego Dinámico.

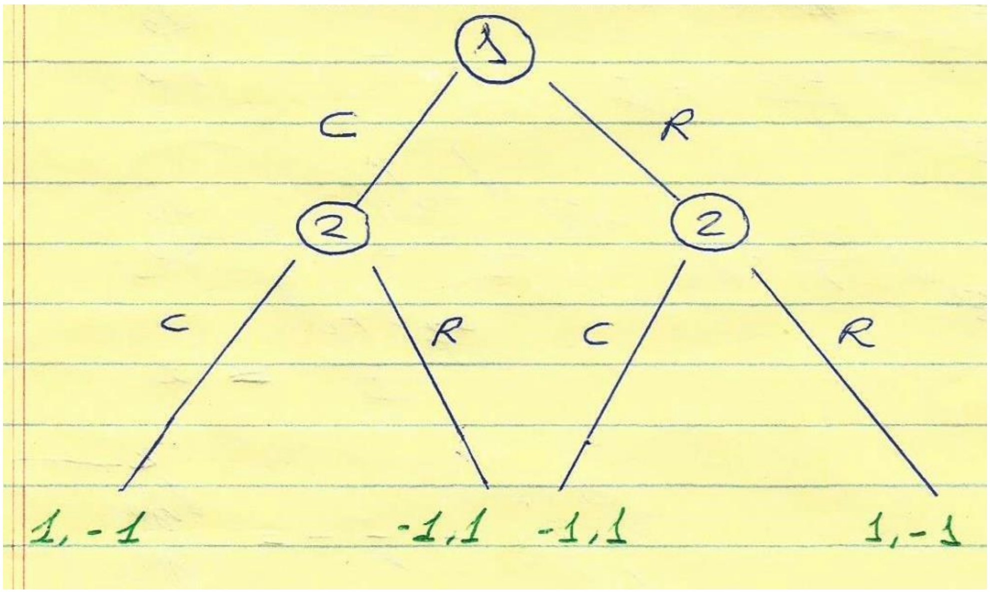
Un *Jugador* elige una acción tras observar la acción de su oponente.

Planteamiento.

Se propone como ejemplo una modificación del juego *Matching Pennies*. En el juego original, los jugadores muestran de forma simultánea una de las caras de la moneda. Si ambas caras coinciden, el *Jugador 1* recibe un pago de *1* euro del *Jugador 2*. Si ambas caras son diferentes, el *Jugador 2* recibe un pago de *1* euro del *Jugador 1*.

En la presente versión del juego, los pagos son los mismos. Sin embargo, el *Jugador 1* juega antes y el *Jugador 2* ve la jugada antes de decidir qué cara va a mostrar.

La ***Forma Extensiva*** del Juego es la siguiente:



1. Las *Estrategias* son distintas de las *Acciones* en un *Juego Secuencial* o *Juego Dinámico*. Una *Estrategia* es un plan contingente. Es decir, un plan que propone una acción para cada posible evolución del juego.

   Estrategias: son planes de acción para todas las posibilidades de acción observadas.

   En el caso anterior, el *Jugador 1* tiene dos posibles *Estrategias*: *Cara* (*C*) y *Cruz* (*R*). Sin embargo, el *Jugador 2* tiene cuatro posibles *Estrategias*:
   Jugar *Cara* tanto si el jugador *1* juega *Cara* como si juega *Cruz* (*CC*).
   Jugar *Cruz* tanto si el jugador *1* juega *Cara* como si juega *Cruz* (*RR*).
   Jugar *Cara* si el jugador *1* juega *Cara* y jugar *Cruz* si el jugador *1* juega *Cruz* (*CR*).
   Jugar *Cruz* si el jugador *1* juega *Cara* y jugar *Cara* si el jugador *1* juega *Cruz* (*RC*).

2. El jugador *2* tiene una ventaja por jugar en segundo lugar. El jugador *2* siempre va a jugar la estrategia *RC*. De ese modo, se asegura el pago de *1* euro. Dado que el jugador 2 elige *RC*, el jugador *1* se

nuestra indiferente entre jugar *C* o *R* ya que en ambos casos pierde *1* euro.

1. Mirar la *Solución Recursiva*.

2. Mirar la *Forma Normal*.

La representación en *Forma Normal* del juego es la siguiente:

		Jugador 2			
		CC	***RR***	***CR***	***RC***
Jugador 1	***C***	*1,−1*	*−1, 1*	*1, −1*	*−1,1*
	R	*−1,1*	*1,-1*	*1, −1*	*−1,1*

Hay dos *Equilibrios de Nash*: (*C, RC*) y (*R, RC*).

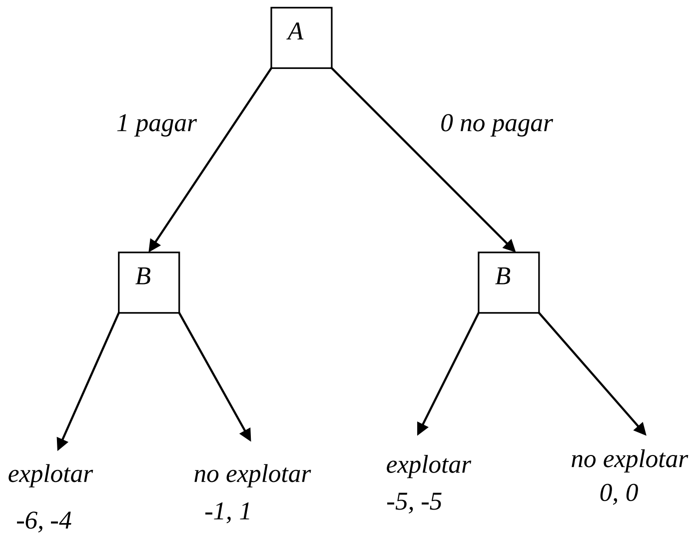
Amenaza No Creíble.

Ejemplo.

Un individuo te amenaza con hacer explotar una bomba que tiene en la mano si no le entregas *1* millón de *euros*. Para completar la matriz de pagos suponemos que los daños del ataque suponen un coste de *5* millones de euros.

El análisis de este juego requiere usar ***<u>exclusivamente</u>*** la información que se ha dado.

Representación del juego en Forma Extensiva.



Este *Juego Dinámico* contiene tres *Subjuegos*. El *Juego* al que se enfrenta el *Jugador B* si el *Jugador A* le da el dinero. El *Juego* al que se enfrenta el jugador *B* cuando el *Jugador A* no le da el dinero y, finalmente, el *Juego* completo.

La *Solución Recursiva* de este juego consiste en solucionar primero los *Subjuegos* del jugador que juega en segundo lugar y después el juego total en función de los resultados en los *Subjuegos*.

Caso 1.

El jugador *A* le da el dinero y el jugador *B* no explota la bomba.

Caso 2.

El jugador *A* no le da el dinero y el jugador *B* no explota la bomba.

El jugador *A* debe decidir qué hacer considerando que en ambos casos el jugador *B* no explota la bomba. Como consecuencia, elige no darle el dinero.

Este resultado es un *Equilibrio de Nash*. *No explotar* la bomba es una *Estrategia Dominante* para el jugador *B*. Como consecuencia, ésa es la estrategia óptima del Jugador *B,* en cualquier caso. La estrategia óptima del jugador *A* es no darle el dinero.

Este juego contiene una sorpresa cuando se analiza su *Forma Normal*. El jugador *A* tiene dos *Estrategias*, dar el dinero o no darlo. El jugador *B* tiene cuatro *Estrategias*:
Explotar si le da el dinero y explotar si no se lo da (*ee*).
No explotar si le da el dinero y no explotar si se lo da (*nn*).
Explotar si le da el dinero y no explotar si no se lo da (*en*).
No explotar si le da el dinero y explotar si no se lo da (*ne*).

		Jugador B			
		ee	*nn*	*en*	*ne*
Jugador A	*1*	*-6, -4*	*-1,1 ✓*	*-6, -4*	*✓-1,1 ✓*
	0	*✓-5, -5*	*✓0,0 ✓*	*✓0,0 ✓*	*-5, -5*

La sorpresa es que el *Equilibrio* que logramos antes usando una solución recursiva (*0, nn*) no es el único *Equilibrio de Nash*. Aparecen otros dos *Equilibrios*: (*1, ne*) y (*0, en*)
El primero de ellos (*1, ne*) es muy interesante. Se trata de un *Equilibrio de Nash* ya que, si *B* decide jugar *ne*, el óptimo para *A* es darle el dinero. Por otra parte, si *A* le da el dinero es óptimo para *B* jugar de este modo para que la decisión de *A* sea óptima (si no plantea explotar la bomba cuando no le da el dinero *A* no debería dárselo). No obstante, este equilibrio está basado en una *Amenaza no Creíble*. ***Se trata de una amenaza que sirve para que la estrategia óptima del jugador A sea pagar la cantidad exigida pero que no se llevaría a cabo en caso de llegar a esa tesitura***.
Por otra parte, *el Equilibrio de Nash* (*0, en*) contiene una acción que nunca se realizaría (explotar si te pagan). Ante la estrategia *en* del jugador *B*, la estrategia óptima de *A* es no pagar (0). Por tanto, si *A* no juega *1*, la estrategia de *B* de explotar la bomba cuando reciba el dinero es irrelevante ya que el juego nunca llega a ese punto.

Algunas aclaraciones sobre amenazas no creíbles.

1. Se trata de una actuación que aparece en una *Estrategia* y que no se llevaría a cabo si el jugador llegase al punto de tener que hacerla.
2. Sirve para mantener el equilibrio porque afecta a la decisión óptima del oponente.
3. Para evitar equilibrios con *Amenazas no Creíbles* se refina el concepto de *Equilibrio de Nash* buscando que el comportamiento de los *Jugadores* sea óptimo incluso en situaciones que no se producen en *Equilibrio*.
4. El *Equilibrio de Nash Perfecto en los Subjuegos* ocurre cuando el equilibrio en los *Subjuegos* es un *Equilibrio de Nash*. Esto implica la existencia de optimalidad incluso en aquellos *Subjuego* a los que no se accede.
5. Estos *Equilibrios de Nash Perfectos en los Subjuegos* se identifican mediante la búsqueda de la *Solución Recursiva*. Es decir, buscando en primer lugar los *Equilibrios de Nash* en los *Subjuegos*.

En el caso analizado anteriormente, (*1, ne*) y (*0, en*) son *Equilibrios de Nash*, pero no son *Equilibrios de Nash Perfectos en los Subjuegos*. Por otra parte, (*0, nn*) es un *Equilibrios de Nash Perfectos en los Subjuegos*.

Ejemplo: Amenaza no Creíble en la entrada en un mercado.

La *Función de Demanda* de un mercado viene dada por la ecuación: $P = 41 - Q$. *Función de Costes*: $C(q) = q$.

Equilibrio de Cournot.

La empresa *1* produce la cantidad que maximiza su beneficio dada la cantidad que produce el *2*. La empresa *2* hace lo mismo. La solución conjunta a estas dos decisiones constituye el denominado *Equilibrio de Cournot*. El beneficio del productor *1* se escribe como: $\Pi_1 = (41 - q_1 - q_2)q_1 - q_1$.

La condición de primer orden de este problema de optimización es:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 41 - q_1 - q_2 - q_1 - 1 = 0$$

$$q_1 = 20 - \frac{1}{2} q_2$$

Por simetría, la repetición del proceso para el segundo productor daría como resultado: $q_2 = 20 - \frac{1}{2} q_1$.

La solución resulta de resolver el sistema de ecuaciones anterior:

$$q_1 = q_2 = 13,3$$
$$Q = 26,6$$
$$P = 14,3$$
$$\Pi_1 = \Pi_2 = (14,3 - 1) \times 13,3 = 177$$

Stackelberg. Modelo Líder-Seguidora.

La primera empresa (*Líder*) tiene en cuenta la reacción de la segunda a su decisión. La segunda (*Seguidora*) toma la decisión del primero como dada. Por tanto, la cantidad producida por la segunda sigue la misma lógica que en el *Modelo de Cournot*. Es decir, la maximización del beneficio de la empresa *Seguidora* (2) implica: $q_2 = 20 - \frac{1}{2} q_1$.

La empresa *Líder* tiene en cuenta la reacción de la seguidora. Es decir, el beneficio se escribe como: $\Pi_1 = \left(41 - q_1 - 20 + \frac{1}{2} q_1\right) q_1 - q_1 = 20 q_1 - \frac{1}{2} q_1^2$.

La maximización del beneficio implica que:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 20 - q_1 = 0$$

$$q_1 = 20$$

Por tanto, se tiene que:

$$q_1 = 20$$
$$q_2 = 20 - \frac{1}{2} \times 20 = 10$$
$$Q = 30$$
$$P = 11$$
$$\Pi_1 = (11 - 1) \times 20 = 200$$
$$\Pi_2 = (11 - 1) \times 10 = 100$$

A continuación, representamos esta situación como un juego en forma extensiva. Para la empresa *Líder* consideramos dos estrategias: producir la cantidad de *Cournot* (*13*) o producir la cantidad del *Modelo Líder-Seguidora* (*20*). Para la empresa *Seguidora*, consideramos dos posibles acciones producir la cantidad del modelo de *Cournot* (*13*) o la cantidad del *Modelo Líder-Seguidora* (*10*). Por tanto, necesitamos calcular el beneficio de dos situaciones que no se habían considerado antes.

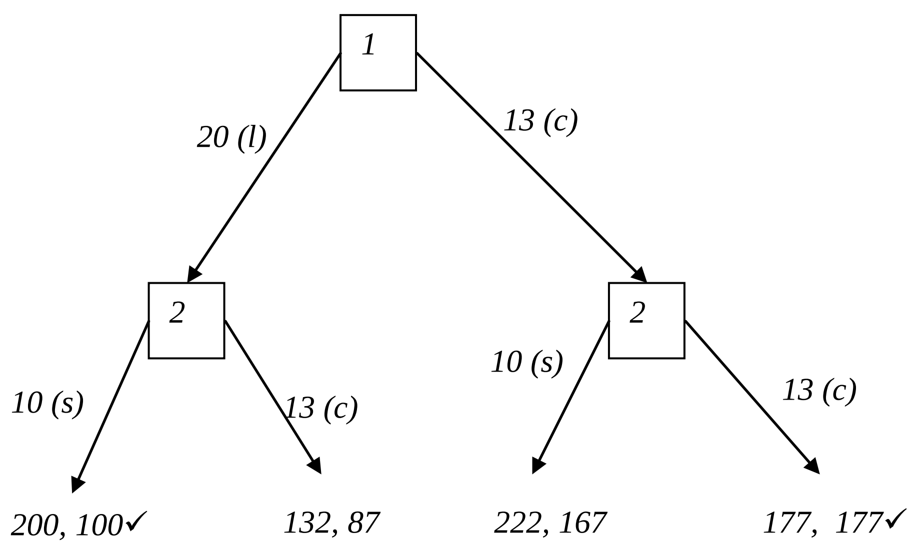
En primer lugar:

$$
\begin{aligned}
&q_1 = 20,\ q_2 = 13{,}3\\
&Q = 33{,}3\\
&P = 7{,}6\\
&\Pi_1 = (7{,}6 - 1) \times 20 = 132\\
&\Pi_2 = (7{,}6 - 1) \times 13{,}3 = 87
\end{aligned}
$$

En segundo lugar:

$$
\begin{aligned}
&q_1 = 13{,}3,\ q_2 = 10\\
&Q = 23{,}3\\
&P = 17{,}6\\
&\Pi_1 = (17{,}6 - 1) \times 13{,}3 = 222\\
&\Pi_2 = (17{,}6 - 1) \times 10 = 167
\end{aligned}
$$

La representación en *Forma Extensiva* es:



La *Solución Recursiva* es la siguiente:

La empresa *2* elegiría *s* si la empresa *1* eligiese *l*.

La empresa *2* elegiría *c* si la empresa *1* eligiese *c*.

Como consecuencia, la empresa *1*, elige *l*.

El *Equilibrio de Nash Perfecto en los Subjuegos* es (*l, sc*). Es decir, la empresa *1* entra con la cantidad óptima de la empresa *Líder* de *Stackelberg* y la empresa *2* produce la cantidad óptima de la *Seguidora*.

La colección completa de *Equilibrios de Nash* se observa mejor en una *Representación Normal* del juego.

		Empresa 2			
		ss	***cc***	***cs***	***sc***
Empresa 1	***l***	*200, 100 ✓*	*132, 87*	*132, 87*	*✓200, 100 ✓*
	c	*✓222, 167*	*✓177, 177 ✓*	*✓222, 167*	*177, 177 ✓*

Los *Equilibrios de Nash* son:

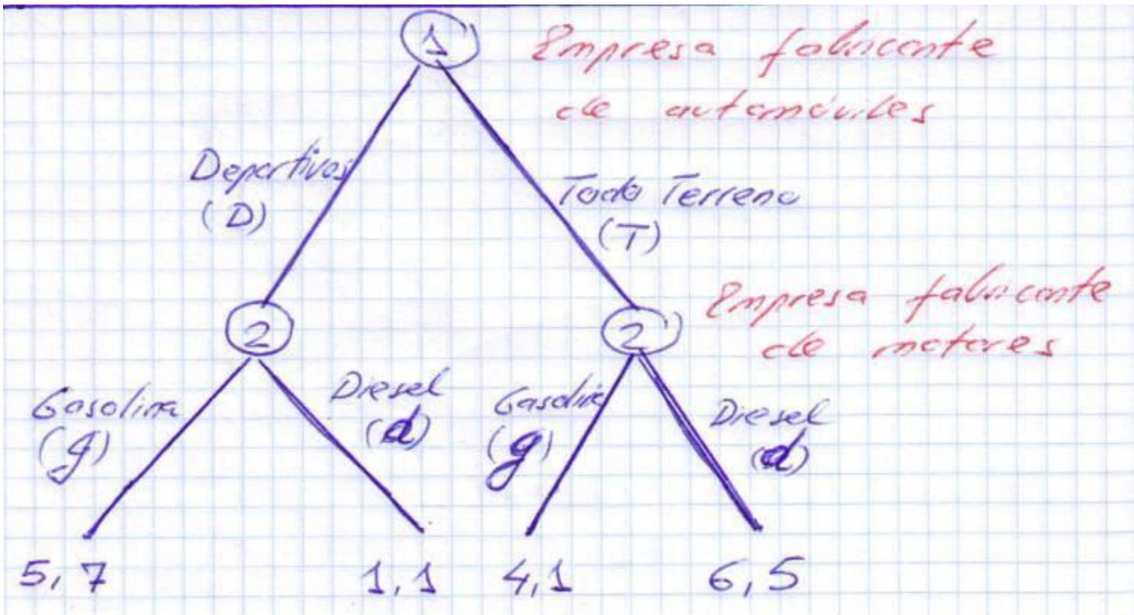
(*l, sc*) que es la *Solución Recursiva* que identifica el *Equilibrio Perfecto en los Subjuegos*.

(*c, cc*) que es un *Equilibrio de Nash* basado en una *Amenaza no Creíble*. De hecho, la empresa *2* no producirá *c* (*13*) cuando la empresa *1* entre como empresa líder jugando *l* (*20*). Sin embargo, esta circunstancia nunca llega ya que, si la empresa *2* juega **siempre** *c*, la estrategia **óptima** de la empresa 1 es *c*. En estas circunstancias, la estrategia óptima de *2* es *cc*. De otro modo, la estrategia **óptima** de la empresa *1* cambiaría. Por tanto, nos encontramos ante dos estrategias óptimas mutuamente compatibles. Es decir, un *Equilibrio de Nash*.

3.5. Amenazas, compromisos y credibilidad.

Amenaza no Creíble.

Una empresa fabricante de automóviles está a punto de introducir un nuevo modelo. Tiene dos estrategias posibles: producir un *Deportivo* (*D*) o producir un *Todo Terreno* (*T*). La empresa que le suministra los motores puede decidir producir motores de gasolina (*g*) o diesel (*d*).



Solución Recursiva.

El fabricante de motores producirá motores de gasolina (*g*) si el fabricante de automóviles produce un deportivo (*D*). Si el fabricante de automóviles produce un Todo Terreno (*T*), el fabricante de automóviles produce un motor diesel (*d*). Viendo los pagos de esta decisión, el fabricante de automóviles decide producir un Todo Terreno (*T*). El *Equilibrio de Nash* obtenido mediante la *Solución Recursiva* es (*T, gd*) cuyo pago es (*6, 5*). Se trata del *Equilibrio de Nash Perfecto en los Subjuegos*. No contiene *Amenazas no Creíbles*.

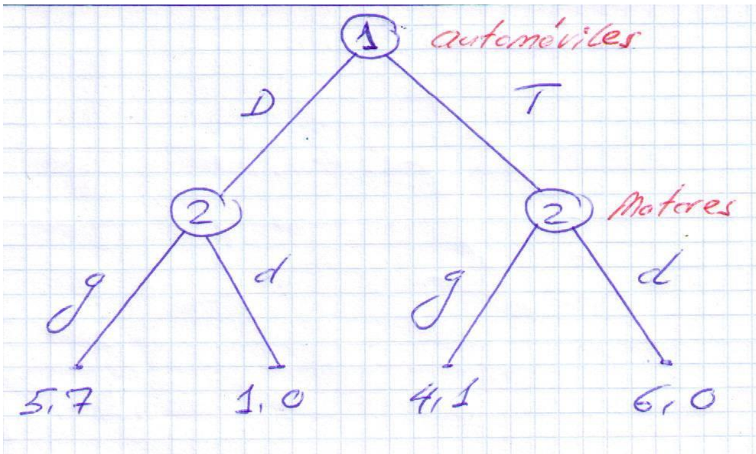
El juego en *Forma Normal* nos señala la existencia de otros *Equilibrios de Nash*.

		Empresa 2			
		gg	***dd***	***gd***	***dg***
Empresa 1	***D***	*5, 7*	*1, 1*	*5, 7*	*1, 1*
	T	*4, 1*	*6, 5*	*6, 5*	*4, 1*

El *Equilibrio de Nash* (*D, gg*) corresponde con una *Amenaza no Creíble*. La estrategia de la empresa *2* de producir siempre motores de gasolina lleva a la empresa *1* a producir el deportivo.

Una actuación que hace imposible no cumplir la amenaza.

La empresa *2* desmonta su departamento de motores diesel.



Afianzan el compromiso.

Ahora, *gg* es una estrategia óptima para la empresa *2*. La estrategia óptima de la empresa *1* es producir el deportivo (*D*). El *Equilibrio* (*D, gg*) es un *Equilibrio de Nash Perfecto en los Subjuegos*.

Juego en Forma Normal.

		Empresa 2			
		gg	***dd***	***gd***	***dg***
Empresa 1	***D***	*5,7*	*1,0*	*5,7*	*1,0*
	T	*4,1*	*6,0*	*6,0*	*4,1*

Apéndice 1.

Racionalidad en el *Dilema del Prisionero*.

Playing for Real, Ken Binmore.

Se suele decir que a dos jugadores bondadosos o inocentes les iría mejor en el *Dilema del Prisionero* que a dos jugadores que simplemente buscan su propio beneficio.

Dilema del prisionero jugado por dos jugadores egoístas.

		Jugador egoísta B	
		delata	*no delata*
Jugador egoísta A	*delata*	✓ *−3, −3*✓	✓*−1, −10*
	no delata	*−10, −1*✓	*−2, −2*

Ambos van *3* años a la cárcel.

El argumento en contra de la solución es que dos jugadores bondadosos tendrían un mejor resultado. Es decir:

Dilema del prisionero jugado por dos jugadores bondadosos.

		Jugador bondadoso B	
		delata	*no delata*
Jugador bondadoso A	*delata*	*−3, −3*	*−1, −10*✓
	no delata	✓*−10, −1*	✓*−2, −2*✓

Lo jugadores bondadosos nunca delatan y sólo van a la cárcel 2 años.

Kenn Binmore en *Playing for Real* argumenta que la falacia surge porque ponemos a un jugador bondadoso a jugar contra otro bondadoso. La manera de saber si ser bondadoso es mejor que ser egoísta (o viceversa) es comparar el resultado de un jugador bondadoso y otro egoísta cuando juegan contra el mismo tipo de jugador.

Un jugador bondadoso y uno egoísta se enfrentan a un jugador bondadoso.

		Jugador bondadoso B	
		delata	*no delata*
Jugador bondadoso A	*delata*	*−3, −3*	*−1, −10*✓
	no delata	✓*−10, −1*	✓*−2, −2*✓
		Jugador bondadoso B	
		delata	*no delata*
Jugador egoísta A	*delata*	✓*−3, −3*	✓*−1, −10*✓
	no delata	*−10, −1*	*−2, −2*✓

El jugador bondadoso B nunca delata. El jugador bondadoso A no delata y ambos acaban dos años en la cárcel. El jugador egoísta A delata al bondadoso B y se ahorra un año de cárcel. En este caso, el comportamiento egoísta supera al bondadoso cuando ambos se enfrentan a otro jugador bondadoso.

Un jugador bondadoso y uno egoísta se enfrentan a un jugador egoísta.

		Jugador egoísta B	
		delata	*no delata*
Jugador bondadoso A	*delata*	*−3, −3*✓	*−1, −10*
	no delata	✓*−10, −1*✓	✓*−2, −2*
		Jugador egoísta B	
		delata	*no delata*
Jugador egoísta A	*delata*	✓*−3, −3*✓	✓*−1, −10*
	no delata	*−10, −1*✓	*−2, −2*

El jugador egoísta B siempre delata. El jugador bondadoso A no delata y acaba con una condena de *10* años en la cárcel. El jugador egoísta A delata al egoísta B y acaban ambos en la cárcel 3 años. De nuevo, el comportamiento egoísta supera al bondadoso cuando ambos se enfrentan a otro jugador egoísta.

Apéndice 2.

¿Era Salomón un hombre sabio o tuvo suerte?

Dos mujeres se presentan delante del Rey Salomón afirmando ambas que el niño que traen es suyo. Salomón propone dividir el niño a la mitad para que cada una tenga una parte.

		Impostora	
		Mío	*Suyo*
Madre	*Mío*	*−10, 1*	*10, 0*
	Suyo	*−5, 5*	*−10, 1*

Salomón cree reconocer a la madre por acceder a que la otra mujer se quede con el niño antes de que sea dividido.

¿Qué pasa si la impostora se da cuenta a tiempo y dice lo mismo que la madre?

Apéndice 3.

Mecanismos de revelación de voluntad de pago.

El mercado competitivo es un mecanismo de revelación de pago.

Tiene unos requisitos que no siempre se cumplen.

Auctions: Theory and Practice

The Toulouse Lectures in Economics

Paul Klemperer

Nuffield College, Oxford University, Oxford OX1 1NF, England

http://www.paulklemperer.org

Princeton University Press, 2004 (click here for details or to purchase)

This book is a non-technical introduction to auction theory; its practical application in auction design (including many examples); and its uses in other parts of economics. It can be used for a graduate course on auction theory, or – by picking selectively – an advanced undergraduate or MBA course on auctions and auction design

Subasta de segundo precio (Vickrey)

El subastador quiere sacar la máxima cantidad posible al adjudicar el objeto subastado a la persona con la máxima voluntad de pago.

Problema de la subasta tradicional.

Comprador *1*: voluntad de pago *50*

Comprador *2*: voluntad de pago *100*

El comprador *1* dejará de pujar en *51*. No llega a mostrar su voluntad de pago.

Propuesta.

Los compradores hacen una única puja. Se le adjudica al comprador con la máxima puja. Paga la cantidad pujada por el que queda en segundo lugar.

Análisis

Comprador *A*: tiene una voluntad de pago de *100* y trata de mentir sobre su voluntad de pago para obtener el objeto lo más barato posible.

Comprador *B*: tiene una voluntad de pago de *75* y dice la verdad

		B: V=75
A: V=100	*Pujas*	*Utilidad*
	50	*0 (se lo lleva el B)*
	100	*25=100−75*
	150	*25=100−75*

Primer resultado: es peligroso pujar menos de *100* porque no sabes cuál es la voluntad de pago del oponente.

No ganas nada pujando más de *100*. De hecho, observa que pasa si el jugador *B* tiene una voluntad de pago de *125* y hace una puja sincera.

		B: V=125
A: V=100	*Pujas*	
	50	*0 (se lo lleva el B)*
	100	*0 (se lo lleva el B)*
	150	*−25=100−125*

Apéndice 6

El juego de la colaboración

Este juego aparece en el libro de crecimiento económico de Daron Acemoglu.

Se trata de modelizar dos culturas distintas. Una cultura promovería el esfuerzo y la otra no.

El esfuerzo tiene un coste $c > 0$.

El esfuerzo conjunto de todos los jugadores produce un gran aumento de productividad. Sin embargo, el esfuerzo es inútil si sólo lo hace un jugador.

		Jugador B	
		Sin esfuerzo	*Con esfuerzo*
Jugador A	*Sin esfuerzo*	$10,10$	$10,10-c$
	Con esfuerzo	$10-c,10$	$100-c,100-c$

El juego se puede aplicar al problema de mantener limpio un espacio público. A ambos jugadores les desagrada la suciedad (*−10*) y les agrada un entorno limpio (*10*). Sin embargo, llevar la basura a una papelera les supone a ambos un coste ($c > 0$). El espacio sólo se mantiene limpio si ambos evitan tirar basura al suelo y la llevan a una papelera.

		Jugador B	
		Suelo	*Papelera*
Jugador A	*Suelo*	$-10,-10$	$-10,-10-c$
	Papelera	$-10-c,-10$	$10-c,10-c$