TEMA 4

Representación de la Tecnología

Revisado en noviembre de *2022*.

Productivity isn't everything, but in the long run it is almost everything. A country's ability to improve its standard of living over time depends almost entirely on its ability to raise its output per worker.

Paul Krugman, The Age of Diminishing Expectations (1994)

4.1. Función de Producción

La *Función de Producción* se escribe como:

$$y = f(x_1, \ldots, x_k)$$

donde, y representa el ***máximo*** output que se puede conseguir dado un vector de inputs. Por simplicidad, analizamos el caso de dos inputs y un output. Para mantener la notación usada en *Teoría del Consumidor*, la *Función de Producción* se escribe como:

$$z = f(x, y)$$

x e y son las cantidades de dos inputs usados en el proceso productivo.

z es la cantidad máxima de output que es posible obtener a partir de los inputs x e y.

Ejemplos de Función de Producción.

Lineal: $z = x + y$.

Leontief: $z = \min\{x, y\}$.

Cobb-Douglas: $z = xy \quad z = Ax^{0,4}y^{0,6} \quad z = Ax^{\alpha}y^{\beta}$.

Productividad.

La tecnología de dos procesos productivos se puede representar por dos *Funciones de Producción* como:

$f(x,y) = x + y \quad g(x,y) = 2x + 2y$

Si $x = 1$ e $y = 1$ (por ejemplo, *1* máquina y *1* trabajador) se tiene que:

$f(1,1) = 1 + 1 = 2 \quad g(1,1) = 2 \times 1 + 2 \times 1 = 4$.

Es decir, que el segundo proceso productivo (alternativamente, *Tecnología*) es capaz de generar más output a partir de una cantidad dada de factores. Podríamos decir que el segundo proceso productivo tiene una mayor *Productividad*.

Por tanto, la *Función de Producción* es **esencial a la hora de modelizar la *Productividad***.

Análisis a Corto Plazo.

Se mantiene constante un factor y se analiza el efecto de aumentar el otro.

Producto Marginal.

El Producto Marginal de un factor es la cantidad en que aumenta la producción (z) cuando ese factor aumenta en *1* unidad manteniendo el otro factor *constante*.

El *Producto Marginal* del factor x y el *Producto Marginal* del factor y pueden representarse por las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

Las tres notaciones son equivalentes.

Propiedades del *Producto Marginal*.

1. El *Producto Marginal* es positivo.

2. El *Producto Marginal* es decreciente.

Es decir, cada unidad de un input que se añade al proceso productivo, manteniendo constantes el resto de los inputs, incrementa la producción, pero el incremento de producción disminuye con cada unidad de input que se añade.

<u>Esta segunda propiedad se conoce como Ley de Rendimientos Decrecientes.</u>

Ejemplo.

Función de Producción: $z = \sqrt{xy}$.

Corto Plazo (y = *1*): $z = \sqrt{x}$.

x	*z*	*Producto Marginal de x*
1	*1*	*-*
2	*1,41*	*0,41*
3	*1,73*	*0,32*
4	*2*	*0,27*

Sugerencia.

Pensar en un mundo con *Producto Marginal* creciente ayuda a convencerse de que no es un fenómeno que se observe frecuentemente. Básicamente, cada unidad usada de un input sería más "productiva" que la anterior y menos que la siguiente. En principio, sería ilimitado lo que podría llegar a producirse aumentando exclusivamente ese input.

Factor Fijo	***Factor Variable***	***Producto Total***	***Producto Marginal***	***Producto Medio***
10	*1*	*9*	–	*9*
10	*2*	*16*	*7*	*8*
10	*3*	*21*	*5*	*7*
10	*4*	*24*	*3*	*6*
10	*5*	*25*	*1*	*5*
10	*6*	*24*	*-1*	*4*
10	*7*	*21*	*-3*	*3*

Factor Fijo	***Factor Variable***	***Producto Total***	***Producto Marginal***	***Producto Medio***
30	*1*	*14*	–	*14,0*
30	*2*	*41*	*27*	*20,5*
30	*3*	*66*	*25*	*22,0*
30	*4*	*89*	*23*	*22,3*
30	*5*	*110*	*21*	*22,0*
30	*6*	*129*	*19*	*21,5*
30	*7*	*146*	*17*	*20,9*
30	*8*	*161*	*15*	*20,1*
30	*9*	*174*	*13*	*19,3*
30	*10*	*185*	*11*	*18,5*
30	*11*	*194*	*9*	*17,6*

Relación entre Producto Medio y Producto Marginal.

$$PME_x = \frac{z}{x}$$

La relación entre *Producto Medio* y *Producto Marginal* es la siguiente:

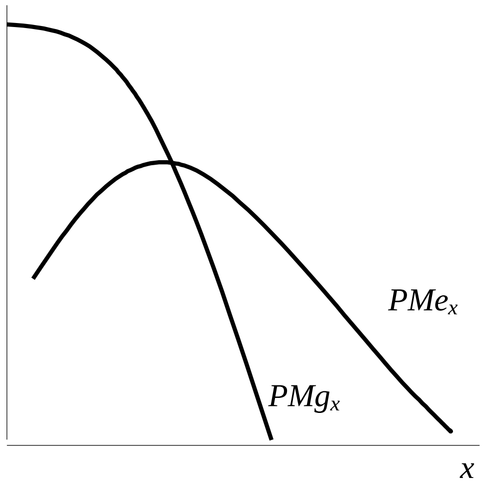
$$z = xPME_x$$
$$PMG_x = \frac{\partial z}{\partial x} = PME_x + x\frac{\partial PME_x}{\partial x}$$

Existen tres casos:

$$PMG_x > PME_x \Leftrightarrow \frac{\partial PME_x}{\partial x} > 0$$
$$PMG_x = PME_x \Leftrightarrow \frac{\partial PME_x}{\partial x} = 0$$
$$PMG_x < PME_x \Leftrightarrow \frac{\partial PME_x}{\partial x} < 0$$

Es decir, si el *Producto Medio* es creciente el *Producto Marginal* será mayor que el *Producto Medio*. Si el *Producto Medio* es decreciente, el *Producto Medio* será menor que el *Producto Medio*. El *Producto Medio* y el *Producto Marginal* coinciden cuando el *Producto Medio* es máximo.

La intuición de este resultado es la siguiente. El *Producto Marginal* es la producción de la última unidad de input usada. Si la última unidad aporta más al producto que la media de las anteriores (producto medio) el *Producto Medio* aumenta. Si la última unidad aporta menos al producto que la media de las anteriores, la media (*Producto Medio*) disminuye. Por último, si aporta lo mismo que la media de las unidades anteriores el producto marginal no cambia. La representación gráfica de la relación entre *Producto Medio* y *Producto Marginal* es la siguiente:



Relación entre Productividad del Trabajo medida como Producto Medio del Trabajo y Productividad Total de los Factores.

Incremento de la *Productividad Total de los Factores*. Se produce un incremento de producción para cualquier cantidad de *Capital* y *Trabajo*. Se trata de un desplazamiento hacia arriba de la *Función de Producción*.

El incremento de la *Productividad Total de los Factores* incrementa el *Producto Medio del Trabajo* (*Productividad del Trabajo*) para cualquier cantidad de *Capital* y *Trabajo*.

Sin embargo, en ***ausencia*** de crecimiento de la *Productividad Total de los Factores*, se puede:

1. Incrementar el *Producto Medio del Trabajo* reduciendo la cantidad de *Trabajo* para una cantidad fija de *Capital*.
2. Incrementar el *Producto Medio del Trabajo* incrementando la cantidad de *Capital* para una cantidad fija de Trabajo.

Por tanto, hay incrementos de la *Productividad del Trabajo* que no se corresponden con incrementos de la *Productividad Total de los Factores*.

Ejemplo.

Función de Producción a Corto Plazo: $Y = 10\sqrt{L}$

Y representa la producción y L el número de trabajadores.

Se trata de un análisis a *Corto Plazo* ya que sólo hay un factor variable. El resto de los factores se mantienen constantes y aparecen reflejados en el número que multiplica.

L	*Y*	*PME*	*PMG*
1	*10*	*10*	---
2	*14,1*	*7*	*4,1*
3	*17,3*	*5,7*	*3,2*
4	*20*	*5*	*2,7*

El *Producto Marginal del Trabajo* señala si es conveniente contratar un trabador adicional. Cuando ya tienes *1* trabajador, la aportación a la producción de *1* trabajador adicional es de *4,1*. Si el salario es menor o igual a *4,1* se podría hacer esa contratación.

En la práctica, el *Producto Medio* se calcula con mucha facilidad. Se trata de una división de producción entre número de trabajadores. Por otra parte, el *Producto Marginal* es inobservable y requiere una estimación más sofisticada. En este punto, es necesario señalar que no es conveniente usar el *Producto Medio* como un sustituto del *Producto Marginal* para tomar decisiones.

La idea de incrementar el *Producto Medio* por trabajador reduciendo la plantilla tampoco es muy sensata. El número de trabajadores depende de su *Producto Marginal* y del *Salario*.

El incremento del *Producto Medio* puede venir por un *Desplazamiento* de la *Función de Producción* al aumentar el uso del *Factor Fijo*. Por ejemplo: $Y = 20\sqrt{L}$.

L	*Y*	*PME*	*PMG*
1	*20*	*20*	---
2	*28,2*	*14,1*	*8,2*
3	*34,6*	*11,54*	*6,4*
4	*40*	*10*	*5,4*

En este caso, sería posible contratar un segundo trabajador si el *Salario* fuese menor o igual a *8,2*.

4.2. Sustitución de factores

Análisis a Largo Plazo

A *Largo Plazo*, todos los factores son variables.

Isocuanta.

Representa conjuntos de factores de producción que dan lugar a un mismo nivel de producción.

Se trata de la *Curva de Nivel* de la *Función de Producción*.

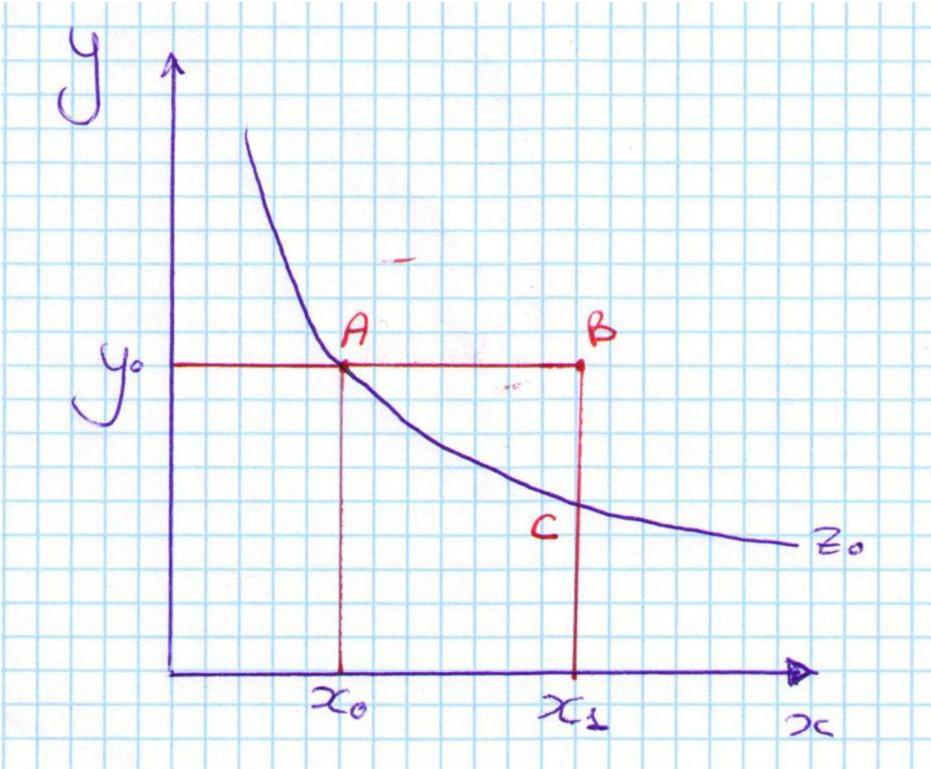
La *Isocuanta* representa las ***posibilidades de sustitución*** que existen a la hora de producir un determinado nivel de producción.

Ejemplos.

Isocuantas de diferentes *Funciones de Producción* capaces de producir *10* unidades de output.

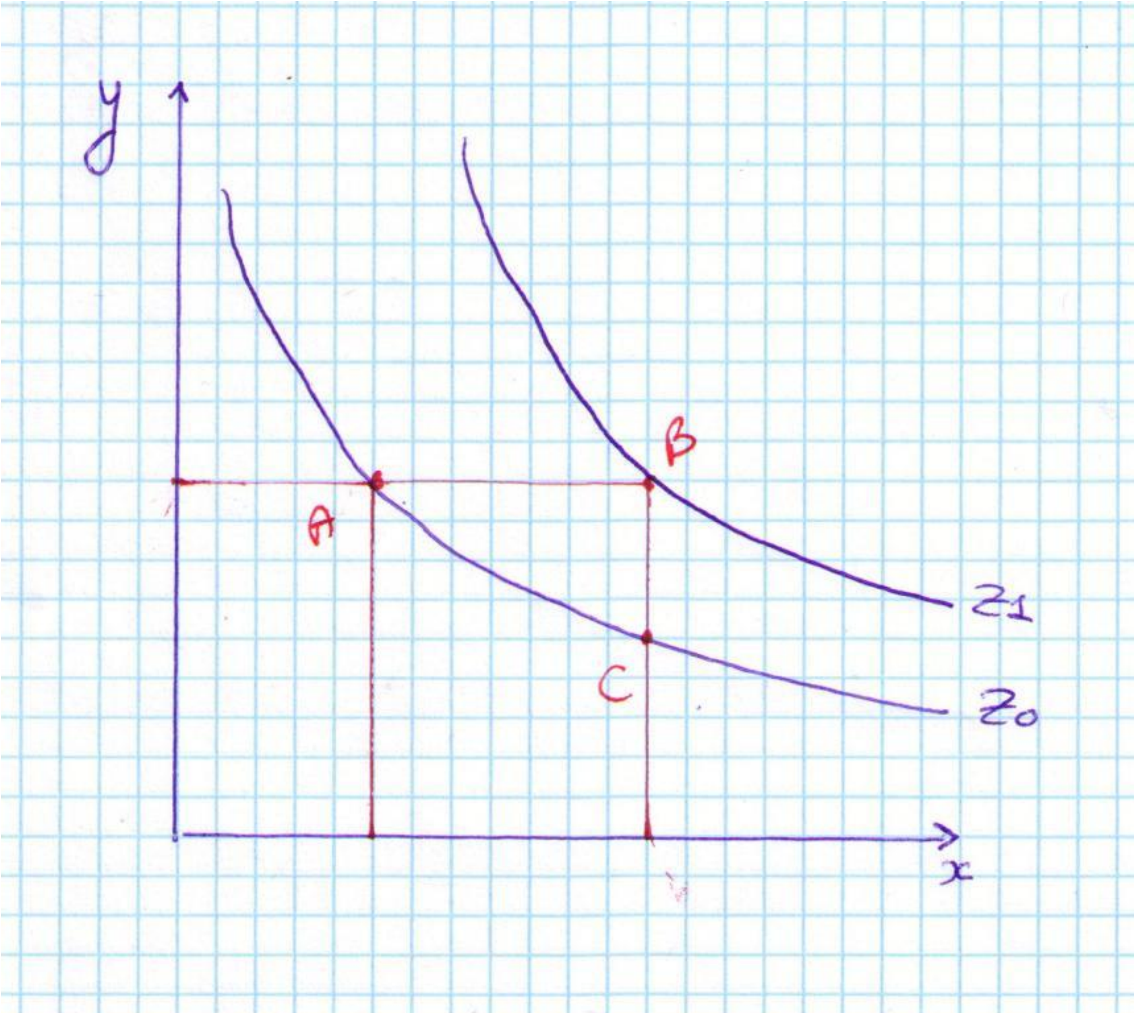
Función de producción	*Isocuanta*	*Despejando el factor y para representar*
$z = x + y$	$10 = x + y$	$y = 10 - x$
$z = xy$	$10 = xy$	$y = \frac{10}{x}$

Pendiente de la isocuanta



El punto *A* y el *B* comparten la cantidad de factor y (y_0). Sin embargo, el punto *B* tiene una cantidad mayor de *x*. Por tanto, si el producto marginal de *x* es positivo, el punto *B* corresponde con un nivel de producción más elevado que el *A*. Si se quiere mantener la cantidad de output cuando se aumenta el input *x* es necesario reducir la cantidad del input *y*. En otras palabras, la *Isocuanta* tiene una pendiente negativa.

Desplazamiento de la isocuanta.



El nivel de producción de la *Isocuanta* de la derecha (z_1) es más alto que z_0. La razón es que el punto *A* y el *B* comparten la cantidad de factor *y* (y_0). Sin embargo, el punto *B* tiene una cantidad mayor de *x*. Por tanto, si el producto marginal de *x* es positivo, el punto *B* corresponde con un nivel de producción más elevado que *A*. Por tanto, se encuentra en una *Isocuanta* diferente. Podemos deducir, que las *Isocuantas* situadas más a la derecha representan niveles de producción más altos.

Representación matemática de la pendiente de la isocuanta.

La *i*

Isocuanta se caracteriza porque el nivel de producción es fijo.

$$f(x,y) = z_0$$

Los incrementos de la producción se pueden aproximar de la siguiente forma:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = 0\,.$$

El incremento tiene que ser igual a cero al tratarse de una *Isocuanta* en que la producción no puede cambiar. En la expresión anterior, se puede despejar la pendiente de la *Isocuanta* como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} < 0\,.$$

Relación Marginal de Sustitución Técnica.

Se define como:

$$RMST_{xy} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

La *Relación Marginal De Sustitución Técnica de y por x ($RMST_{xy}$)*, mide el número de unidades en que la tecnología permite reducir el uso del factor *y* al aumentar en *1* unidad el uso del factor *x*, <u>manteniendo constante la producción</u>.

La *Relación Marginal de Sustitución Técnica* es el cociente de los *Productos Marginales* de los dos inputs.

Un ejemplo puede ayudar a la interpretación. El *Producto Marginal* de *x* es *100* y el *Producto Marginal* de *y* es *50*. Es decir, que una unidad de *x* es el doble de productiva que una unidad de *y*. Por tanto, es lógico que si aumentas una unidad de *x* puedas prescindir de dos unidades de *y*. Esa es precisamente la medida que nos proporciona la *Relación Marginal de Sustitución Técnica.*

La relación entre sustitución de factores a lo largo de la *Isocuanta* y los *Productos Marginales* es razonable pero no evidente. El

desarrollo matemático es de gran ayuda para llegar a este resultado con nitidez.

Se puede demostrar que la *Relación Marginal de Sustitución Técnica* **es decreciente**. Sugerencia: pensar en lo absurdo de la propuesta contraria. Se observarían procesos productivos que usan sólo un factor de producción.

4.3. Análisis de la escala de producción.

Rendimientos a Escala.

$$z = f(x, y)\ .$$

¿Qué pasa si multiplico las cantidades de inputs x e y por un número λ? (Por ejemplo, $\lambda = 2$). Pueden darse tres casos:

1. *Rendimientos Decrecientes a Escala.* El output crece en una proporción menor que los inputs.

$$f(\lambda x, \lambda y) < \lambda z$$

Ejemplo *1*: $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Pasar de $x = y = 1$ a $x = y = 4$.

Ejemplo *2*:

x	*1*	*1*	*2*	*2*
y	*1*	*2*	*1*	*2*
z	*7*	*8*	*9*	*10*

2. *Rendimientos Constantes a Escala.* El output crece en la misma proporción que los inputs.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda z\ .$$

Ejemplo *1*: $f(x, y) = x + y$. Pasar de $x = y = 1$ a $x = y = 2$.

Ejemplo *2*:

x	*1*	*1*	*2*	*2*
y	*1*	*2*	*1*	*2*
z	*7*	*9*	*12*	*14*

3. *Rendimientos Crecientes a Escala*. El output crece en mayor proporción que los inputs.

$$f(\lambda x, \lambda y) > \lambda z \ .$$

Ejemplo *1*: $f(x, y) = x^2 + y^2$. Pasar de $x = y = 1$ a $x = y = 2$.

Ejemplo *2*:

x	*1*	*1*	*2*	*2*
y	*1*	*2*	*1*	*2*
z	*7*	*10*	*14*	*16*

Esta característica de la tecnología permite explicar ciertos fenómenos como la concentración de la producción en una empresa (fabricantes de automóviles) o la producción por múltiples unidades dispersas en otros sectores.

El análisis de los *Rendimientos a Escala* es particularmente sencillo cuando la *Función de Producción* es *Homogénea*. En ese caso se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) = \lambda^n z$$

El exponente n se denomina *Grado de Homogeneidad* de la función.

Ejemplo de una *Función de Producción* homogénea:

$f(x, y) = x + y$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y = \lambda\left(x + y\right) = \lambda f(x, y)$

¿Qué *Grado de Homogeneidad* presenta esta función?

Ejemplo de una función de producción ***NO*** homogénea:

$f(x, y) = x + y^2$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \left(\lambda y\right)^2 = \lambda x + \lambda^2 y^2$

No es posible representar el resultado como el producto de una potencia de λ y la función original.

Análisis de los Rendimientos a Escala en una función homogénea.

Si $n > 1$, se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n z > \lambda z$$

Es decir, la función de producción presenta *Rendimientos Crecientes a Escala.*

Ejemplo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 \left(x^2 + y^2\right) = \lambda^2 f(x, y)$$

Intuición: cuando se duplican los factores, la producción se multiplica por *4.*

Otros ejemplos de funciones de producción con *Rendimientos Crecientes a Escala*:

$$f(x, y) = xy$$

Si $n = 1$, se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda z$$

Es decir, la *Función de Producción* presente *Rendimientos Constantes a Escala.*

Ejemplos:

$$f(x, y) = x + y \quad f(x, y) = \sqrt{xy} \quad f(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$$

Finalmente, si $n < 1$, se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n z < \lambda z$$

Es decir, la función de producción presente *Rendimientos Decrecientes a Escala.*

En resumen, el *Grado de Homogeneidad* de la función de producción indica su tipo de *Rendimientos a Escala*.

Ejemplos:

$f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad f(x,y) = x^{0,4}y^{0,5}$

Comentario 1.

Rendimientos a Escala en el transporte marítimo en contenedores cúbicos.

Arista	***Acero***	***Volumen***
1 m	*6 m²*	*1 m³*
2 m	*24 m²*	*8 m³*

La fabricación de contendores tiene *Rendimientos Crecientes a Escala*. Duplicar el acero incrementa en más de doble la capacidad del contendor. Este resultado sugiere que interesa hacer contenedores muy grandes. De hecho, Se ahorraría acero construyendo un único contenedor tan grande como el barco. Sin embargo, aparecerían dificultades de gestión de esos contendedores. Es decir, fuentes de *Rendimientos Decrecientes a Escala*.

Comentario 2.

La idea de Mao Tse-Tung de convertir a China en una potencia siderúrgica usando los hornos domésticos y el trabajo y combustibles agrarios condujo a un impresionante desastre económico. En cierto modo, Mao fue víctima del desconocimiento del concepto de *Rendimientos a Escala*.

Comentario 3.

La dimensión óptima de una actividad.

Caso *1*: producción de electricidad.

Central eléctrica (hidráulica, térmica, nuclear, …), generador individual, generador casero, generador comunitario.

Caso *2*: calefacción individual, calefacción colectiva de edificio, calefacción colectiva de urbanización, calefacción colectiva en una ciudad.

Comentario 4.

Economía de redes. Productividad de las redes.

Factor de producción: longitud del cable (x).

Output: número de conexiones (z).

Tenemos un conjunto de ciudades situadas a *1* unidad de distancia entre ellas: *A, B, C, D, …*

1 unidad de cable permite *1* conexión (*A*, *B*).

2 unidades de cable permiten *3* conexiones (*A, B*), (*A, C*) y (*B, C*).

4 unidades de cable permiten *10* conexiones

(A, B), (A, C), (A, D), (A, E)

(B, C), (B, D), (B, E)

(C, D), (C, E)

(D, E)

En general x unidades de cable permiten:

$$z = \binom{x+1}{2} = \frac{(x+1)!}{(x-1)!2!} = \frac{(x+1)x}{2} = \frac{x^2+x}{2}$$

Analizar *Rendimientos a Escala*.

Analizar *Producto Marginal* de x (longitud del cable).

Aplicar a la instalación de internet.

Instalación de telégrafo (la internet victoriana de Krugman).

fo (la internet victoriana de Krugman).