TEMA 2

Modelización del consumo: preferencias y restricciones.

Revisado en octubre de *2022*.

"En vez de basarse en el tipo de cultura, costumbre o ignorancia para explicar el comportamiento de los consumidores o las empresas *Teoría de los precios y aplicaciones* parte de la premisa básica de que la mayor parte de los comportamientos pueden explicarse como respuestas racionales a incentivos económicos"

Peter B. Pashigian (1996) Teoría de los precios y aplicaciones

La teoría del consumidor consiste en un conjunto de modelos (representaciones simplificadas de la realidad) que analizan las decisiones de consumo como el resultado de una interacción entre las ***Preferencias*** del consumidor y las ***Restricciones*** a las que se enfrenta. En este tema se estudian las características de estos modelos. Para ello, en primer lugar, se analiza la representación simplificada de las preferencias y las restricciones. En segundo lugar, se modelizan las decisiones del consumidor como el fruto de un proceso de ***maximización*** del bienestar sujeto a restricciones.

2.1. Representación de las preferencias: curvas de indiferencia.

¿Qué significa que un individuo prefiera la cesta de bienes A a la B? En los modelos económicos significa, simplemente, que se siente mejor consumiendo A que B.

Supuestos de la Relación de Preferencia.

1. *Completitud.*

Ante dos cestas A y B un individuo siempre va a poder decir:

i. Prefiere la cesta A a la cesta B ($A \succ B$).

ii. Prefiere la cesta B a la cesta A ($B \succ A$).

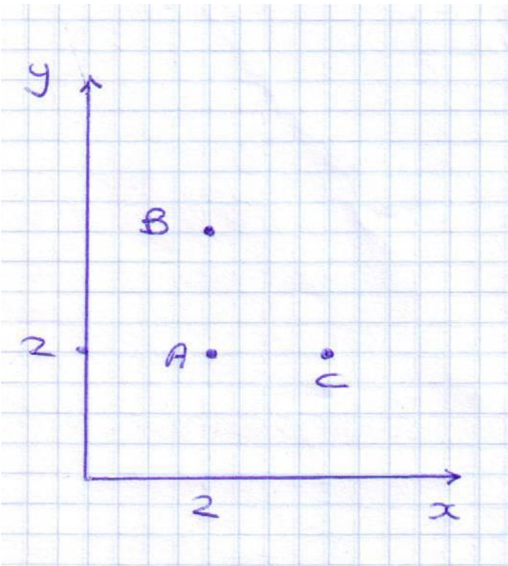
iii. Se muestra indiferente entre ambas cestas ($A \sim B$).

2. *Transitividad.*

Si $A \succ B$ y $B \succ C$, entonces $A \succ C$.

3. Cuanto más mejor.

Gráfico: preferencias sin Curvas de Indiferencia.



La cesta de bienes representada por el punto B es preferida a la cesta representada por el punto A (***Cuanto más mejor***). La cesta B tiene la misma cantidad del bien x que la cesta A, pero una cantidad mayor del bien y.

La cesta representada por el punto C es preferida a la cesta representada por el punto A (***Cuanto más mejor***). La cesta C tiene la misma cantidad del bien y que la cesta A, pero una cantidad mayor del bien x.

La preferencia entre las cestas B y C no se puede establecer con el principio de cuanto más mejor. Estas cestas tienen una cantidad mayor de uno de los bienes pero menos del otro. Es necesario determinar el papel que juega la ***Sustitución*** de bienes en las preferencias de los individuos. Esta información está contenida en la *Curva de Indiferencia.*

Curva de Indiferencia.

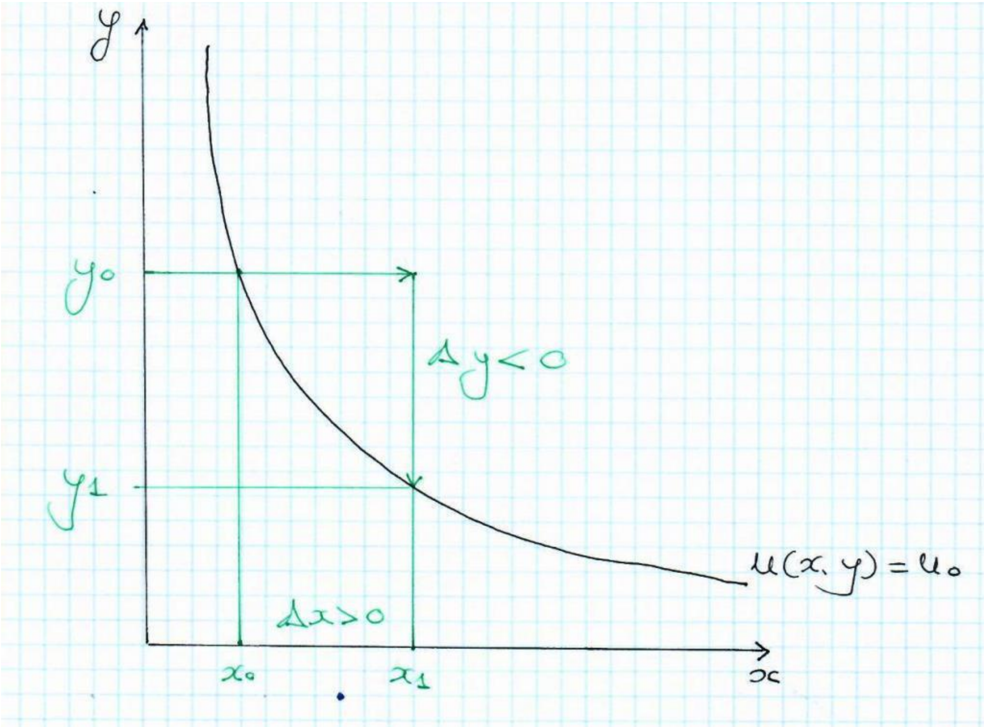
Es un conjunto de cestas de bienes entre las que el individuo se muestra indiferente debido a que todas las cestas proporcionan el mismo nivel de utilidad (bienestar).

La *Curva de Indiferencia* representa posibilidades de sustitución manteniendo constante el nivel de bienestar.

Propiedades.

1. La pendiente de la Curva de Indiferencia es negativa.

Usamos el principio de *Cuánto más Mejor*. Por lo tanto, si se aumenta el consumo del bien x sin modificar el consumo de y el nivel de bienestar (utilidad) aumenta. Es decir, nos movemos a otra *Curva de Indiferencia.* Para mantenerse en la misma *Curva de Indiferencia* es necesario reducir la cantidad del bien y cuando se aumenta x. Esto implica una pendiente negativa de la *Curva de Indiferencia.*



Relación Marginal de Sustitución.

Número de unidades de *y* a las que está **dispuesto** a renunciar para aumentar una unidad de *x* sin que cambien su bienestar (sin salir de la *Curva de Indiferencia* inicial).

¿Cómo se mide la Relación Marginal de Sustitución?

$RMS_{xy} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad RMS_{xy} = -\frac{\partial y}{\partial x}.$

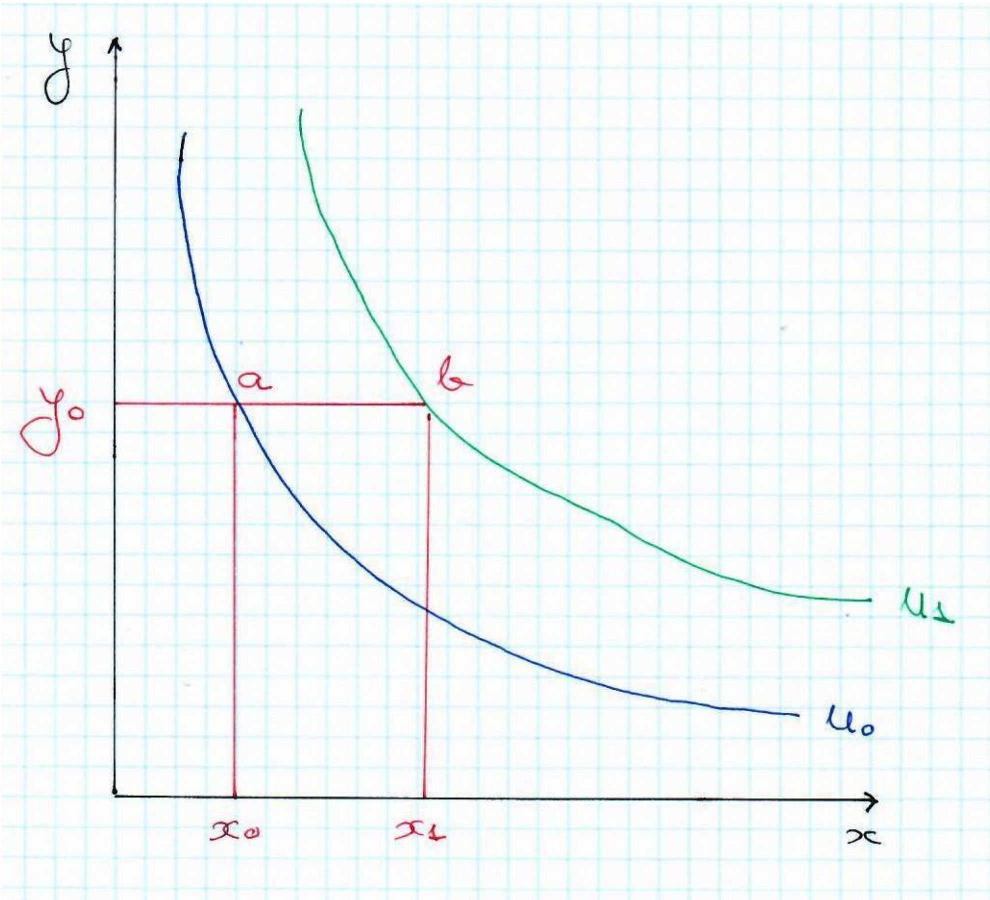
Matemáticas: es necesario reconocer los conceptos matemáticos que se usan para calcular y medir la *Relación Marginal de Sustitución.*

Intuición.

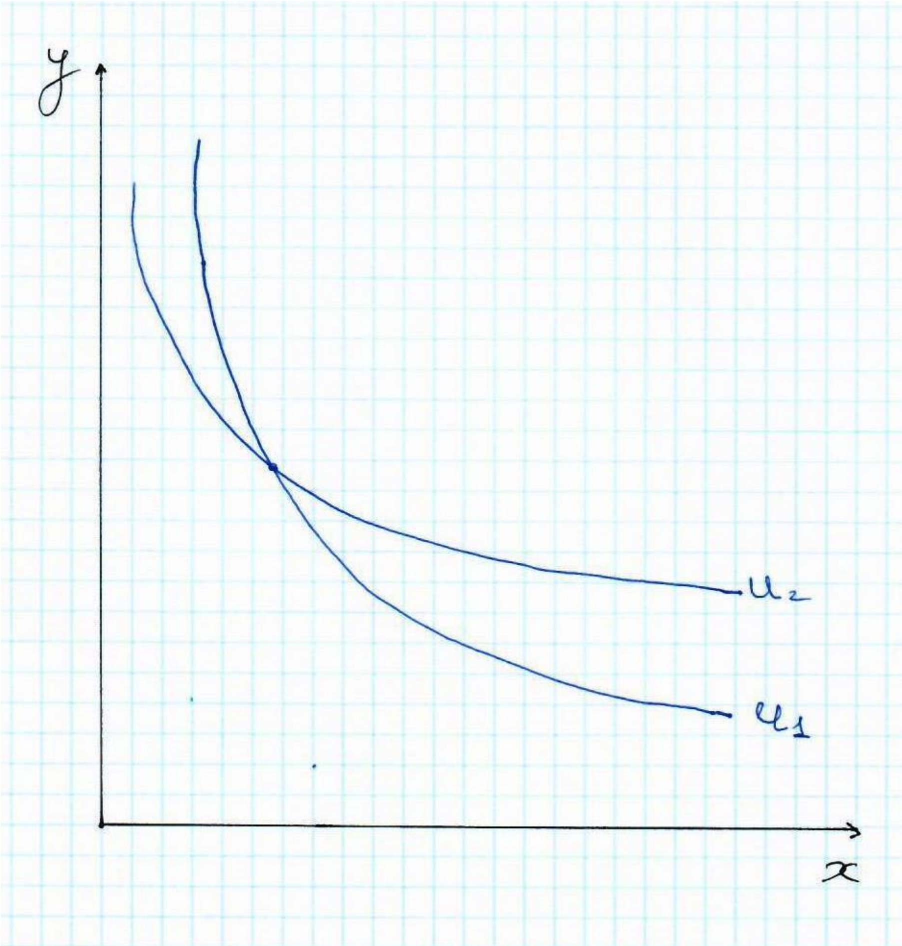
Este concepto contesta a una pregunta muy común ¿Cuánto daría yo por …?

Las Curvas de Indiferencia más a la derecha representan niveles de bienestar superiores.

Fijamos la cantidad del bien *y* en y_0. Las cestas de bienes *a* y *b* tienen la misma cantidad de *y*. La cesta *b* tiene mayor cantidad del bien *x* luego debe corresponder a un nivel superior de bienestar (**Cuanto más mejor**). Todas las cestas de la *Curva de Indiferencia* u_0 producen el mismo nivel de bienestar que *a*. Todas las cestas de la *Curva de Indiferencia* u_1 tienen el mismo nivel de bienestar que *b*. Por tanto, la *Curva de Indiferencia* u_1 representa un mayor nivel de bienestar que la *Curva de Indiferencia* u_0.

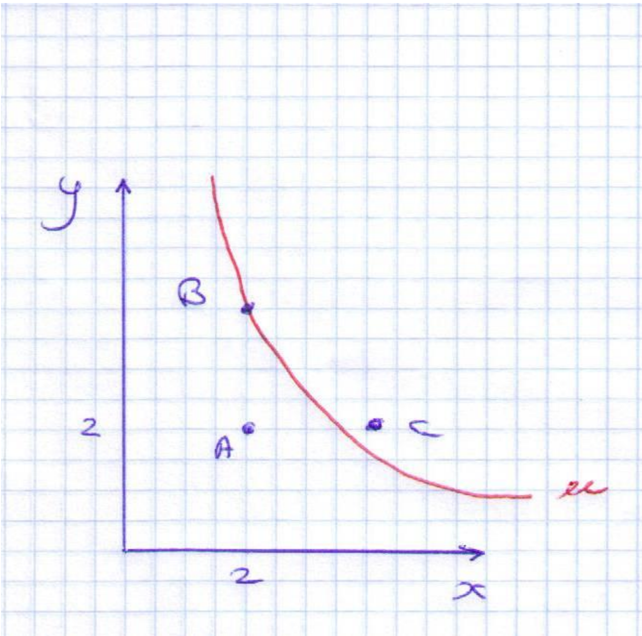


3. Las Curvas de Indiferencia no se cortan.



El punto de intersección sugiere que las dos curvas representan el mismo nivel de bienestar. Sin embargo, la separación de las curvas en otros puntos sugiere que a veces u_1 es un nivel de bienestar superior a u_2 o viceversa. En resumen, el cruce de las *Curvas de Indiferencia* da lugar a un buen número de resultados absurdos.

Gráfico: preferencias con Curvas de Indiferencia.



En este caso, la cesta *C* está a la derecha de la *Curva de Indiferencia* a la que pertenece la cesta *B*. Por tanto, la cesta *C* es preferida a la *B*.

Cálculo de la *Relación Marginal de Sustitución*.

La siguiente tabla representa cinco cestas de bienes *x* e *y* situadas en una *Curva de Indiferencia*.

Cesta	A	B	C	D	E
x (bebida)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
y (comida)	*10*	*5*	*3,3*	*2,5*	*2*

Calcular la RMS_{xy} usando las cestas anteriores.

$$RMS_{xy}^{A} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{5-10}{2-1} = 5.$$

Repetir el ejercicio con la siguiente *Curva de Indiferencia*.

Cesta	A	B	C	D
x (bebida)	*3*	*5*	*9*	*15*
y (comida)	*15*	*9*	*5*	*3*

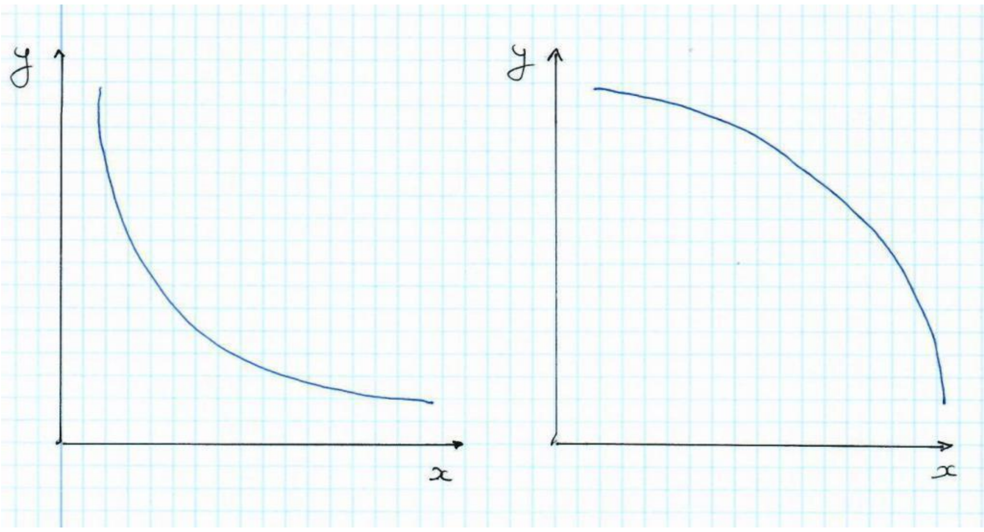
Relación Marginal de Sustitución (RMS) decreciente.

El número de unidades de y a las que estamos dispuestos a renunciar por una unidad de x va decreciendo a medida que aumenta la cantidad de x (manteniendo la *Utilidad* constante, es decir, manteniéndonos en la misma *Curva de Indiferencia*).

Si la *RMS* fuera creciente nos encontraríamos ante individuos bastante extraños, que estarían dispuestos a dar más por cada unidad que por la anterior.

La idea de una *Relación Marginal de Sustitución* decreciente puede quedar clara con un ejemplo. Un individuo llega a una comida campestre con una cesta llena de bocadillos y sin nada de bebida. En principio, estará dispuesto a dar mucha comida por una botella de bebida. Más tarde esta voluntad disminuirá por dos razones. En primer lugar, la sed habrá disminuido. En segundo, lugar cada vez tiene menos comida para intercambiar y esta se vuelve más valiosa.

Representación gráfica de las curvas de indiferencia.



El gráfico de la izquierda representa una *Curva de Indiferencia* con *RMS* decreciente. El gráfico de la derecha representa una *Curva de Indiferencia* con *RMS* creciente.

Tipos de Curvas de Indiferencia.

Sustitutivos Perfectos.

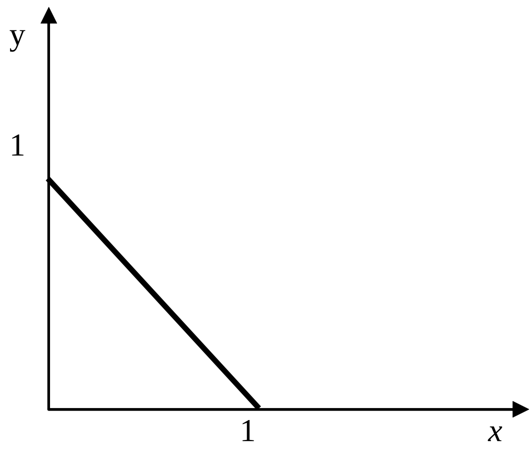
Considera el caso en que el bienestar generado por una cesta con cantidades de dos bienes x e y se pude representar como: $U(x,y) = \alpha x + \beta y$.

El caso particular en que α y β valen 1 es particularmente didáctico: $U(x,y) = x + y$.

Se tiene que: *U(1, 0) = U(0, 1) = 1*. Es decir, consumir *1* unidad de x y no consumir y produce el mismo bienestar que no consumir x y consumir *1* unidad de y. En otras palabras, se puede sustituir *1* unidad de x por *1* unidad de y sin afectar al bienestar.

He adelantado la introducción del concepto de *Función de Utilidad*.

Representación gráfica.



Ejemplo de sustitución perfecta.

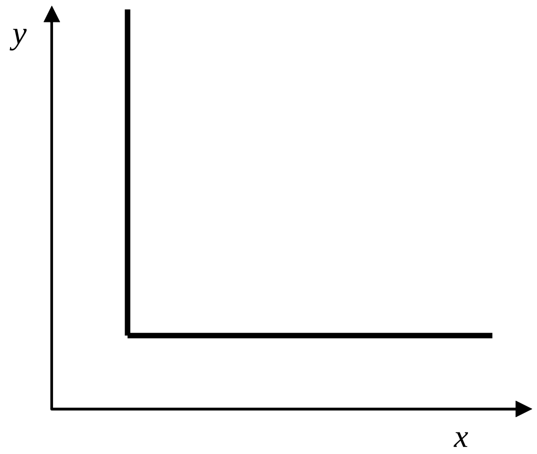
Quiero tomar una pieza de fruta al día. Me es indiferente si es una manzana, una naranja o media pieza de cada tipo de fruta.

Sin sustitución.

La *Función de Utilidad* de *Leontief* representa la ausencia de sustitución: $U(x,y)=\min\{\alpha x,\beta y\}$.

El caso particular en que α y β valen *1* es didáctico: $U(x,y)=\min\{x,y\}$.

Representación Gráfica.



Ejemplo.

Me regalan *1000* zapatos de un pie y, por lo tanto, no me producen ningún bienestar.

Estos dos casos, *Función de Utilidad Leontief* y *Función de Utilidad Lineal*, representan casos polares (extremos). En general, la relación de sustitución entre los bienes se encontrará entre estos dos extremos.

Aplicación del concepto de indiferencia.

"Los caballeros las prefieren rubias". El Economista Naturalista. Robert Frank.

Ser rubia es una característica muy valorada. Puede tener menos de otras características para que ***<u>exista indiferencia</u>***. La indiferencia es importante para el equilibrio. Comentar la existencia de equilibrio (estabilidad de las parejas).

(*r, x*) mujer rubia con un conjunto de características adicionales *x*.

(*m, x*) mujer morena con el mismo conjunto de características adicionales *x*.

(r, x) es preferida a (m, x).

Para que exista indiferencia tienen que cambiar el resto de características x. (r, x_r) indiferente a (m, x_m). ¿Qué relación habrá entre x_r y x_m?

2.2. Restricción Presupuestaría.

Las restricciones son importantes a la hora de definir el comportamiento humano. Cualquier decisión tiene que estar dentro de los límites que marcan las restricciones. En nuestro contexto la *Restricción Presupuestaria* es:

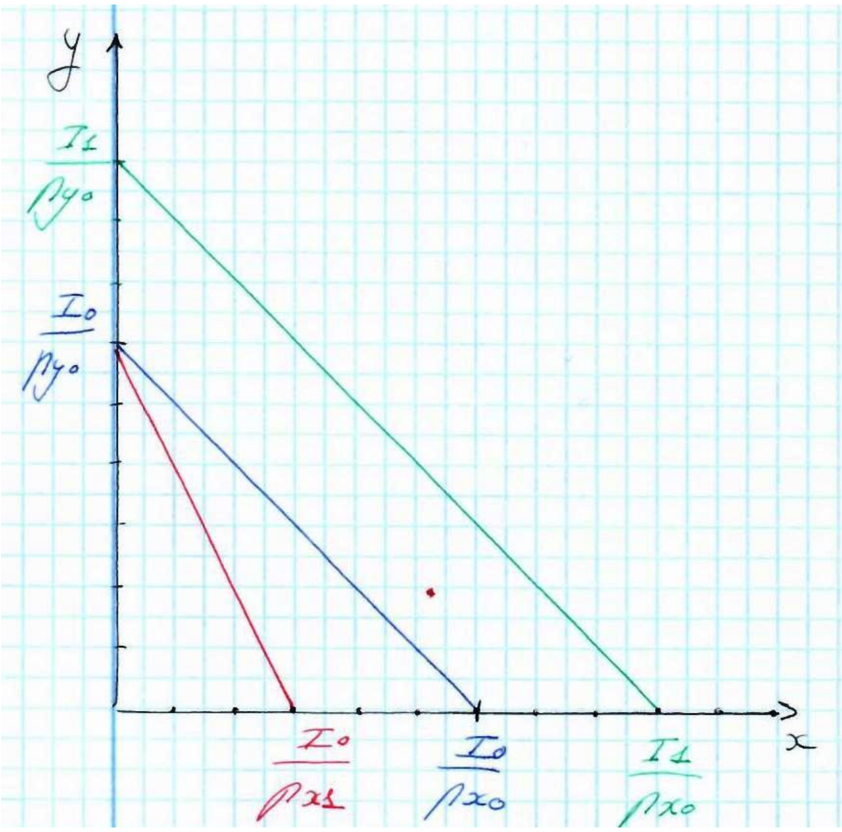
$$p_x\, x \;+\; p_y\, y \;=\; I \qquad 2x+3y=24$$
$$y \;=\; \frac{I}{p_y}-\frac{p_x}{p_y}x \qquad y=8-\frac{2}{3}x$$

donde, x e y representan cantidades de dos bienes, p_x es el precio del bien x, p_y es el precio del bien y e I representa la renta. La *Restricción Presupuestaria* determina las cestas de bienes (x, y) que se pueden adquirir con la *Renta* disponible y los *Precios* existentes.

$\frac{p_x}{p_y}$ mide la cantidad del bien y a la que es **necesario** renunciar cada vez que se aumenta el consumo de x en una unidad. Es decir, se trata del *Coste de Oportunidad* del bien x *en términos* del bien y.

$\frac{I}{p_y}$ mide la cantidad de bien y que se puede adquirir si no se compra ninguna unidad del bien x.

Representación gráfica



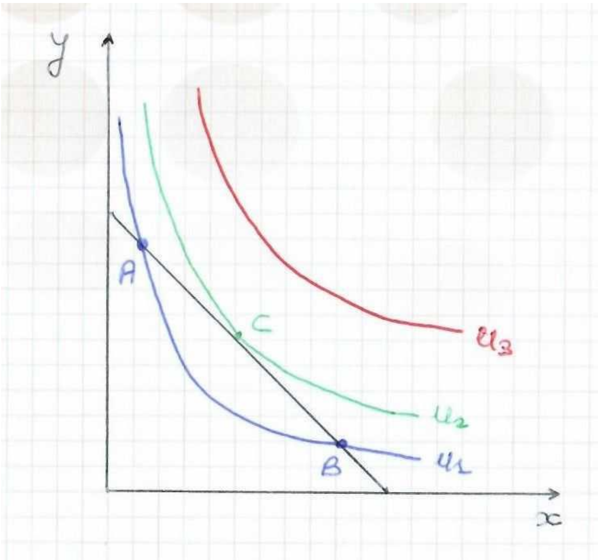
La representación gráfica aclara los desplazamientos y rotaciones posibles de la *Restricción Presupuestaria*. El aumento de la renta desplaza los dos extremos de la restricción (de $\frac{I_0}{p_{y0}}$ a $\frac{I_1}{p_{y0}}$) pero no cambia la pendiente $-\frac{p_{x0}}{p_{y0}}$. Por lo tanto, la restricción se desplaza paralelamente. La renta más elevada te permite adquirir todo un conjunto de cestas de bienes que no estaban disponibles previamente. Estas cestas de bienes se representan en la superficie comprendida entre la restricción original y la restricción desplazada por la renta.

El aumento del precio del bien x (p_{x0} a p_{x1}) no cambia el punto de "anclaje" en el eje de ordenadas $\frac{I}{p_{y0}}$ pero sí cambia el punto de “anclaje” en el eje de abcisas (de $\frac{I}{p_{x0}}$ a $\frac{I}{p_{x1}}$) y la pendiente(de $-\frac{p_{x0}}{p_{y0}}$ a $-\frac{p_{x1}}{p_{y0}}$). Por tanto, el aumento de precio de x produce una rotación de la *Restricción Presupuestaria* en el sentido de las agujas del reloj. La subida del precio reduce las cestas de bienes que puede comprar el consumidor.

¿Qué pasa si se duplican precios y renta?

2.3. Modelo de maximización de la utilidad.

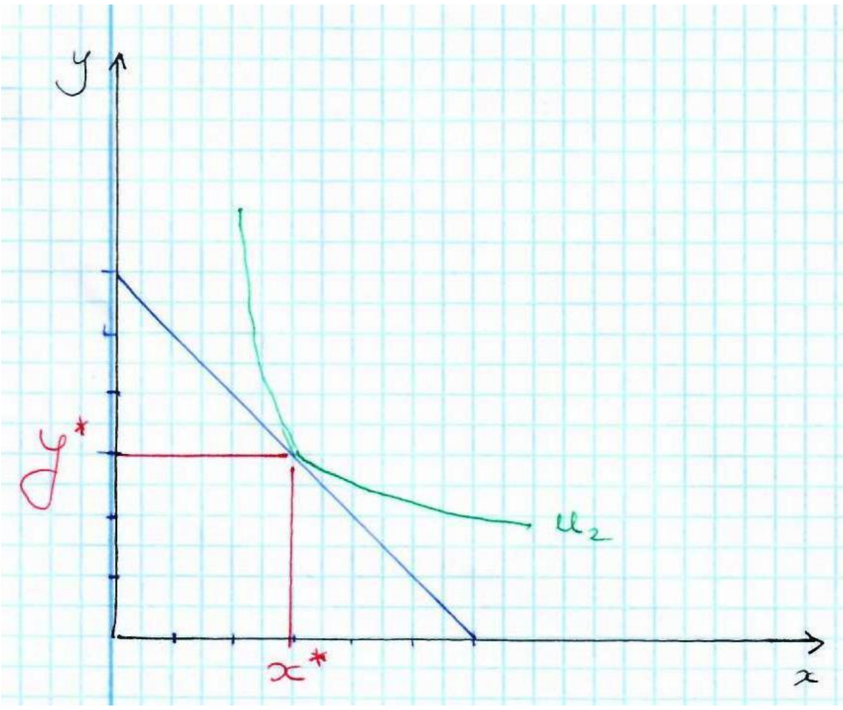
Representación gráfica de las condiciones de maximización.



Las *Cestas de Bienes* representadas por la *Curva de Indiferencia u_3* no son alcanzables con la *Restricción Presupuestaria* que representa la recta. Por tanto, dada la *Restricción Presupuestaria* nunca se puede alcanzar el nivel de bienestar u_3.

Las *Cestas de Bienes* representadas por la *Curva de Indiferencia u_1* no corresponden con un máximo de bienestar (utilidad). De hecho, se pueden trazar *Curvas de Indiferencia* que corresponden a valores más altos de bienestar (más a la derecha) y que, sin embargo, cumplan la *Restricción Presupuestaria*. En el caso de la *Curva de Indiferencia u_2* no es posible encontrar otra *Curva de Indiferencia* más a la derecha que cumpla la *Restricción Presupuestaria*. Esto ocurre en el punto *C*. Por tanto, el máximo nivel de bienestar que permite la *Restricción Presupuestaria* se caracteriza por la tangencia de la *Curva de Indiferencia* y la *Restricción Presupuestaria.*

Representación gráfica de la decisión óptima de un consumidor.



Este gráfico destaca que el consumidor elige la cesta con las cantidades x^* e y^*.

Condición básica de la decisión óptima de consumo. Tangencia de la *Curva de Indiferencia* y la *Restricción Presupuestaria*. Es decir, igualdad de pendientes:

$$RMS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$$

Ambos objetos tienen una interpretación económica clara.
¿Puede darse el siguiente caso?

$$RMS_{xy} > \frac{p_x}{p_y}$$

La *Relación Marginal de Sustitución* (RMS_{xy}) mide el número de unidades de y a que se estaría dispuesto a renunciar por una unidad de x. Por otra parte, $\frac{p_x}{p_y}$ mide el número de unidades de *y* que cuesta una unidad de *x* en el mercado. Si la voluntad de pago por *x* es superior a su coste de oportunidad en el mercado se seguirán comprando unidades de *x*. Es decir, no es un óptimo. Como RMS_{xy} es decreciente en *x*, al aumentar el consumo de *x* ésta irá decreciendo hasta que se cumpla la condición de optimalidad expresada anteriormente.

Ejemplo aclaratorio.
Curva de Indiferencia.

	A	***B***	***C***	***D***
x	*1*	*2*	*3*	*4*
y	*12*	*6*	*4*	*3*

La *Relación Marginal de Sustitución* en el punto (cesta) *A* se puede calcular del siguiente modo:

$$RMS_{xy}^{A} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{6-12}{2-1} = 6\,.$$

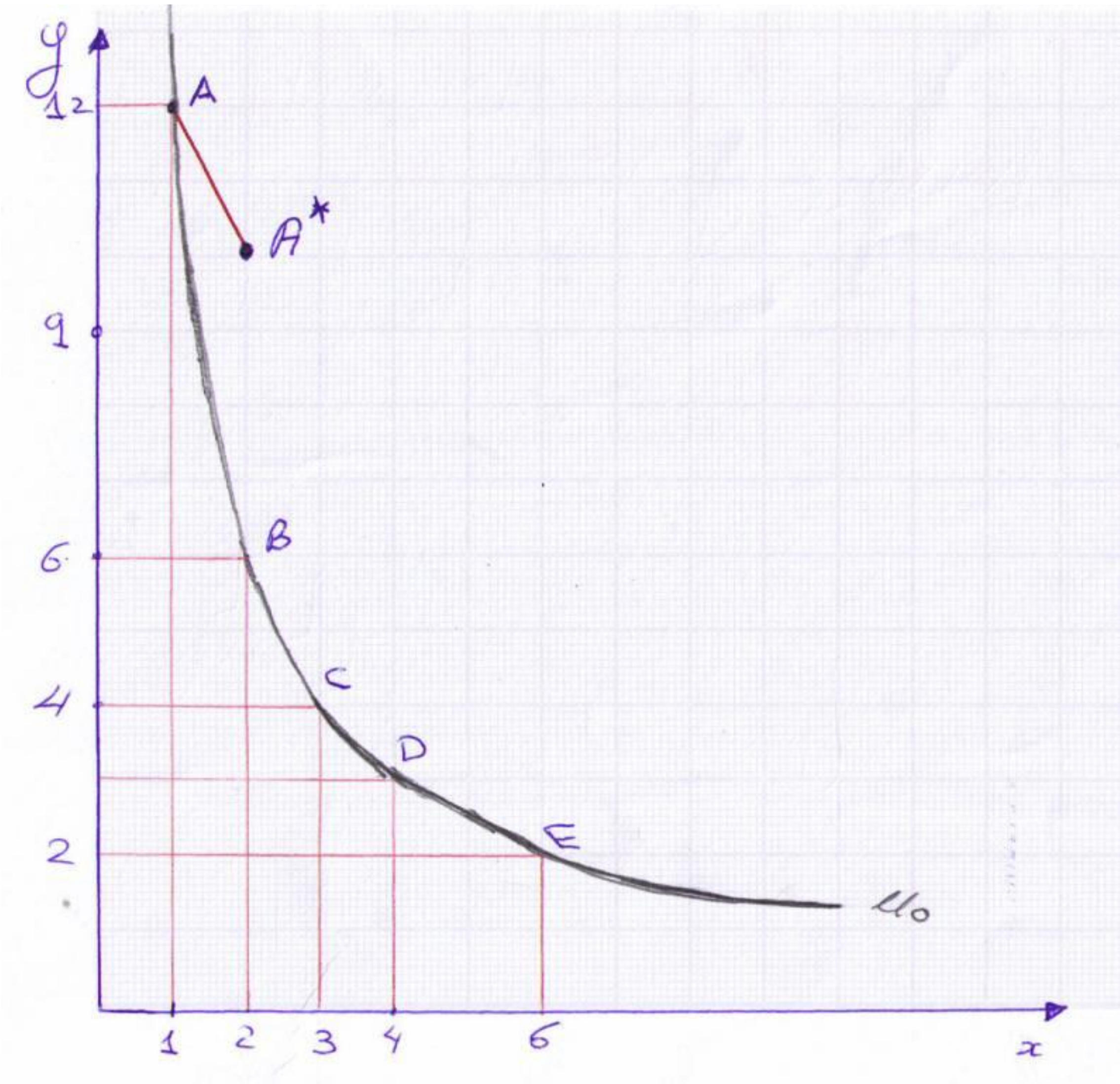
Es decir, el consumidor está dispuesto a dar *6* unidades de *y* por una unidad de *x* sin que varíe su bienestar.
El precio de *x* es *6*. El precio de *y* es *2*. Por tanto, se tiene que:

$$\frac{p_x}{p_y} = -\frac{6}{2} = 3$$

Por tanto, se tiene que: $RMS_{xy} > \frac{p_x}{p_y}$

Se puede ver por qué la cesta *A* no es un óptimo. Los precios relativos le permiten comprar *1* unidad de *x* por *3* de *y*. Por tanto, partiendo de la cesta *A*, puede tener la cesta (*1 + 1, 12 − 3*) = (*2, 9*) haciendo un intercambio en el mercado. La cesta (*2, 9*) le proporciona más bienestar que la cesta *B* (*2, 6*) y, por tanto, más bienestar que la cesta *A*. Por tanto, la cesta *A* no es óptimo.

Representación gráfica.



2.4. Función de Utilidad.

La *Función de Utilidad* representa el nivel de bienestar (utilidad) asociado al consumo de una cesta de bienes.

En general vamos a tener una *Función de Utilidad* con *n* bienes:

$$U = U(x_1, x_2, .., x_n).$$

En este curso los análisis se suelen hacer con dos bienes:

$$U = U(x, y).$$

Ejemplos de *Funciones de Utilidad*:

$U^a(x,y) = x + y$

$U^b(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

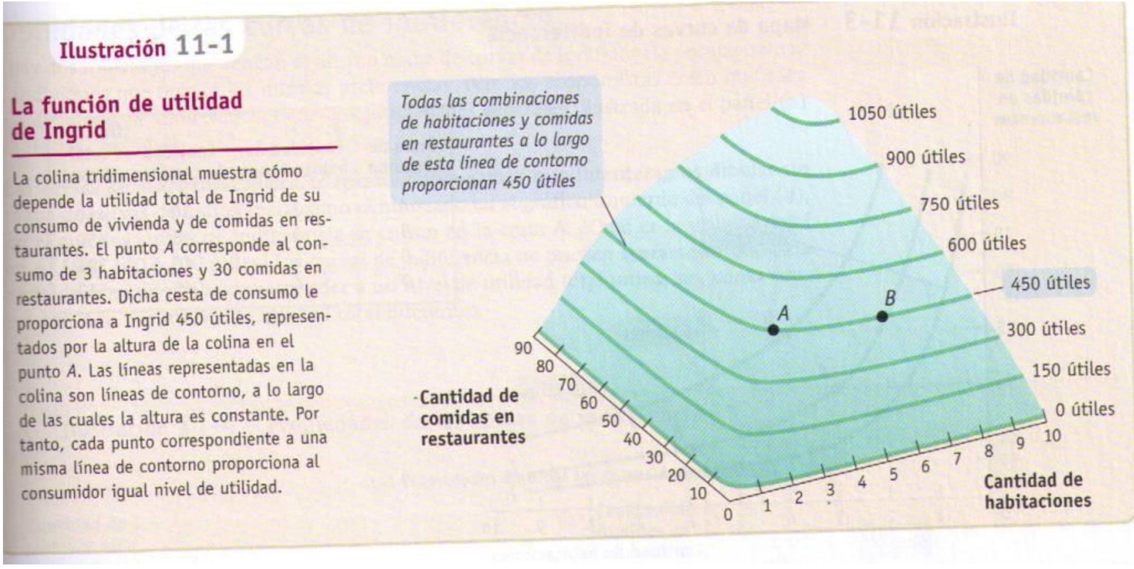
$U^c(x,y) = xy$

Sugerencias.

Pensad en la representación gráfica de estas funciones.

Función de más de una variable (ver apéndice matemático).

Representación gráfica de la utilidad, Krugman-Wells.



Propiedades de la función de utilidad.

1. *Utilidad marginal positiva.*

La *Utilidad Marginal* es el aumento en la utilidad derivado de consumir una unidad adicional de un bien manteniendo las cantidades del resto de los bienes constantes. Esta *Utilidad Marginal* es positiva si se cumple el principio de **Cuanto Más Mejor**. Se prefiere una cantidad mayor de un bien a una cantidad menor (manteniendo constantes las cantidades de otros bienes).

Las implicaciones matemáticas que tiene esta propiedad son:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = U_x(x,y) > 0 \qquad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = U_y(x,y) > 0$$

2. *Utilidad Marginal decreciente*

Las unidades adicionales de un bien producen una satisfacción cada vez menor. La expresión matemática de esta condición es (ver apéndice matemático):

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_{xx} < 0 \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = U_{yy} < 0$$

Ejemplo

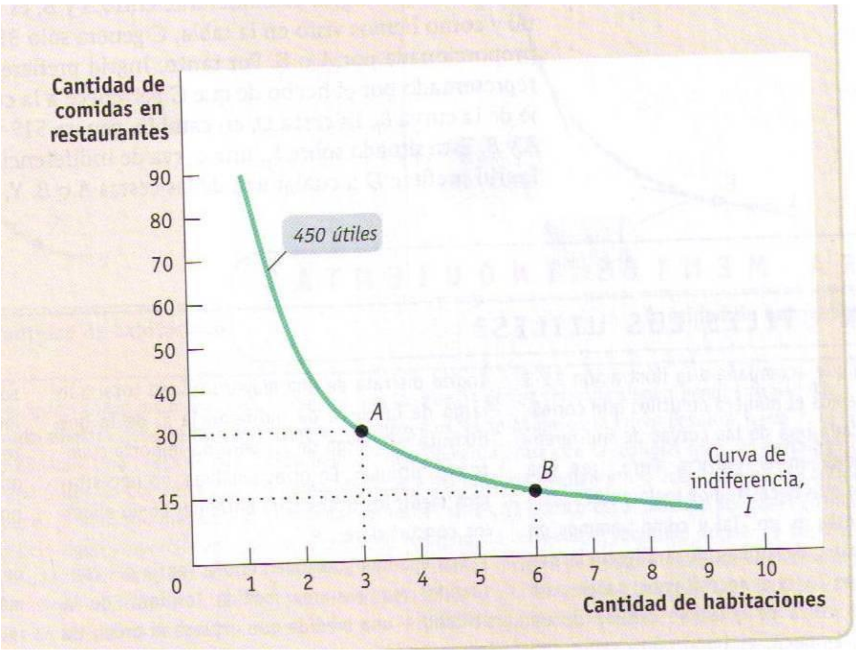
$$U(x,y) = \ln x + \ln y + xy$$

$$U_x(x,y) = \frac{1}{x} + y \qquad U_y(x,y) = \frac{1}{y} + x$$

$$U_{xx}(x,y) = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad U_{yy}(x,y) = -\frac{1}{y^2} < 0 \quad U_{xy} = 1 > 0$$

La ***Curva de Indiferencia*** es una ***Curva de Nivel*** de la *Función de Utilidad*. Es decir, conjuntos de bienes que producen un determinado nivel de utilidad. Al producir el mismo nivel de bienestar los consumidores se muestran indiferentes entre estas cestas.

Representación gráfica Krugman-Wells



Matemáticamente:

$$x,y \mid U(x,y) = \bar{u}$$

Ejemplos de Curvas de Indiferencia obtenidas a partir de Funciones de Utilidad.

Función de Utilidad: $U(x,y) = x \; + y$.

Curva de Indiferencia para el nivel de utilidad *10*: $U(x,y) = x \; + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$.

Curva de Indiferencia para el nivel de utilidad *20*: $U(x,y) = x \; + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$.

Curva de Indiferencia para el nivel de utilidad genérico $\bar{u}$: $U(x,y) = x \; + y = \bar{u} \Rightarrow y = \bar{u} - x$.

Función de Utilidad: $U(x,y) = xy$.

Curva de Indiferencia para el nivel de utilidad *10*: $U \; x,y \; = xy = 10 \Rightarrow y = \dfrac{10}{x}$

Curva de Indiferencia para el nivel de utilidad *20*: $U(x,y) = xy = 20 \Rightarrow y = \dfrac{20}{x}$

Curva de Indiferencia para el nivel de utilidad genérico $\bar{u}$: $U(x,y) = xy = \bar{u} \Rightarrow y = \dfrac{\bar{u}}{x}$

Análisis matemático de la Curva de Indiferencia.

Aproximación de una *Función* alrededor de un punto usando la *Derivada*:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \Rightarrow \Delta y \approx f'(x)\Delta x .$$

Con dos variables explicativas se tiene que:

$$\Delta U \approx U_x \Delta x + U_y \Delta y .$$

¿Cuánto vale ΔU en una curva de indiferencia?

$$U_x \Delta x + U_y \Delta y \approx 0 \Rightarrow -\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{U_x}{U_y} .$$

El objeto de la izquierda es la *Relación Marginal de Sustitución*. Por tanto, hemos demostrado que:

$$RMS_{xy} = \frac{U_x}{U_y}.$$

Es decir, que la *Relación Marginal de Sustitución* se puede calcular como cociente de *Utilidades Marginales*.

Ejemplo:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x = 100 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = U_y = 50$$

Una unidad de x incrementa el bienestar en *100* manteniendo y constante.

Una unidad de y incrementa el bienestar en *50* manteniendo x constante.

$$RMS_{xy} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{100}{50} = 2$$

Se atribuye una valoración doble a x que a y. Por tanto, se puede renunciar a dos unidades de y por una unidad de x manteniendo el nivel de bienestar inalterado.

Comentario.

Utilidad Marginal de las ostras y del pollo en Krugman y Wells.

Analizar la evolución histórica de estas *Utilidades Marginales*.

Apéndice matemático.

In principle, models do not require math, and it is not the math that makes the model useful or scientific.
Verbal arguments that seems intuitive often collapse, or are revealed to be incomplete, under closer mathematical scrutiny. The reason is that "verbal models" can ignore non obvious but significant interactions.
Dani Rodrik, Economics Rules.

Funciones de varias variables.

Una variable z depende del valor que tomen dos (o más) variables:

$$z = f(x,y).$$

Ejemplos:

$$z = x + y$$
$$z = x^2 + y^2$$

Ahora, el concepto de derivada es mucho más rico. Se pueden considerar derivadas con respecto a cada una de las variables independientes. A estas derivadas se les denomina derivadas parciales. La notación y el concepto son los siguientes:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0, \\ y \text{ constante}}} \frac{\Delta f(x,y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0, \\ x \text{ constante}}} \frac{\Delta f(x,y)}{\Delta y}$$

Es importante entender que las derivadas parciales son a su vez funciones de las variables independientes x e y.

Con frecuencia se usan notaciones más simplificadas tales como:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

Ejemplos básicos.

$$z = f(x,y) = 7x + 8y \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 7 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 8$$

$$z = f(x,y) = 7x^2 + 8y^2 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 14x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 16y$$

$$z = f(x,y) = xy \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x$$

Ejemplo en una forma cuadrática.

$$z = f(x,y) = \frac{1}{2}a_{11}x^2 + a_{12}xy + \frac{1}{2}a_{22}y^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y$$

Aproximación de una *Función* <u>en un punto</u> por su *Recta Tangente*.

Punto de aproximación $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$.

Recta:

$$y = mx + n$$

Pendiente: $m = f'(x_0)$.

$$y = f'(x_0)x + n.$$

La *Recta Tangente* pasa por el punto (x_0, y_0):

$$y_0 = f'(x_0)x_0 + n.$$

Restando ambas:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x$$