TEMA 1

MODELOS MICROECONÓMICOS

Revisado en septiembre de *2021*.

Vojtech Jasny grabó la escena con la cámara. Jasny tiene la costumbre de grabar su vida. El cineasta checo de ochenta y dos años está haciendo el documental de su vida, que será tan largo como ésta. Como el mapa que describe Jorge Luis Borges, el mapa perfecto. Tan perfecto que era del tamaño del mundo.

Kirman Uribe
Bilbao-New York- Bilbao

1.1. Introducción.

¿Qué se estudia aquí?

Economía.

Problemas de recursos escasos con usos alternativos. Definición completa más adelante. Esta estructura aparece en multitud de problemas.

Ejemplos increíbles de escasez.

Hasta los individuos más acaudalados sufren de escasez. Como mínimo tienen una escasez de tiempo.

Otros ejemplos de bienes escasos: ¿aire? Contaminación en Madrid, emisiones de gases de efecto invernadero.

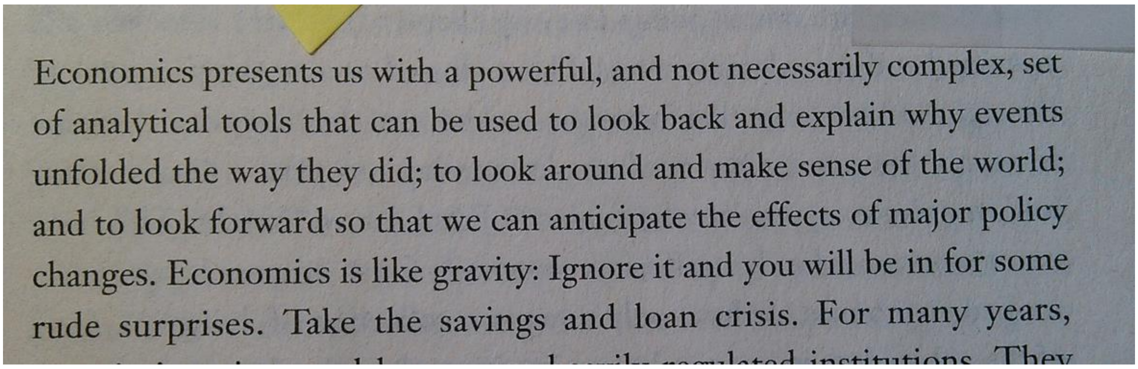
Ejemplos de preguntas económicas.

¿Por qué hay luz eléctrica en este aula sin interrupciones sustanciales?

¿Por qué no hay luz eléctrica en algunas ciudades de África de forma continuada?

¿Por qué hay servicio de telefonía móvil sin interrupciones sustanciales en esas mismas ciudades?

¿Por qué está más iluminado el sur que el norte de la península coreana?



Economics presents us with a powerful, and not necessarily complex, set of analytical tools that can be used to look back and explain why events unfolded the way they did; to look around and make sense of the world; and to look forward so that we can anticipate the effects of major policy changes. Economics is like gravity: Ignore it and you will be in for some rude surprises. Take the savings and loan crisis. For many years,

Charles Wheelan, Naked Economics.

¿Cómo se trabaja en economía?

Con *Modelos*. Es decir, con representaciones simplificadas de la realidad. No se trata de acumular datos ni siquiera de contar las experiencias de cada uno (aunque los datos y la experiencia ayudan a construir un modelo útil).

¿Por qué es útil aprender teoría económica?

David Kreps. Escuela de Negocios. Universidad de Standford.

- Para el ciudadano. Curiosidad intelectual
- Para ejecutivos y empresarios. Entender los resultados del mercado puede ayudar a conseguir mejores resultados del mercado para uno mismo.
- Políticos y funcionarios. Permite analizar los cambios institucionales que pueden mejorar el bienestar de los ciudadanos.

Esta pregunta surge en otros contextos. Por ejemplo, en las facultades de medicina con respecto a la biología (ver biografía de Severo Ochoa).

Curiosidad intelectual.

Tomas un café en la cafetería. El café viene de Colombia, el azúcar de la remolacha del Páramo, la taza de la india, la cuchara de Portugal, la leche de Asturias, el camarero de Ecuador. ¿Quién ha puesto de acuerdo a toda esta gente?, ¿Quién es el responsable de esta ingente labor de coordinación? Explicar cómo puede hacerse todo este trabajo por *1,20 €* merece un estudio detallado.

La diferencia entre vivir la economía y entender la economía.

La mayoría de nosotros viaja en bicicleta sin ningún problema. Sin embargo, pocos podrían explicar algunos de los fenómenos físicos asociados (momento de inercia, fuerza centrífuga, el papel del centro de gravedad). ¿En qué momento es necesario pensar en los fenómenos físicos implicados en el paseo en bicicleta?

La mayoría de nosotros realiza numerosas operaciones económicas en un solo día. Esto es diferente de ser capaz de explicar su funcionamiento. ¿En qué momento es necesario pensar en la teoría económica?

The term "economics" has come to be used in two different ways. One definition focuses on the substantive domain of study: in the interpretation, economics is a social science devoted to understanding how the economy works. The second definition focuses on methods: economics is a way of doing science, using particular tools. In this interpretation the discipline is associated with an apparatus of formal modeling and statistical analysis rather than particular hypothesis or theories about the economy.
Dani Rodrik, Economic Rules

Definición de *Economía*.

Estudio de la asignación de recursos escasos con usos alternativos para satisfacer necesidades humanas.

- *Necesidades humanas*. Se trata de una disciplina antropocéntrica.
- *Usos alternativos*. Deben existir usos alternativos de los recursos para que interese analizar su asignación. Por ejemplo, la mano de obra puede dedicarse a cultivar el campo o a construir una catedral.
- *Escasez*. En ausencia de escasez no interesa analizar las asignaciones alternativas. Se satisfacen todas las necesidades.
- *Asignación*. Aplicar un recurso a un fin.

Ejemplos de asignación de recursos tomados del libro *Vida y Doctrina de los Grandes Economistas (Los filósofos mundanos)* de Robert Heilbroner.

- El Egipto de los faraones. Se trata de una sociedad donde una persona o grupo toma decisiones de asignación de recursos. Por ejemplo, decide el número de personas que van a construir pirámides y las que van a cultivar la tierra para alimentar a la población.
- Planificación central. Un órgano político decide a qué se van a dedicar los recursos de un país.

- Mercado. La asignación de recursos surge de las decisiones independientes de muchos individuos que cada uno busca su propio bienestar.

En ausencia de mercado la economía como ciencia tiene poco que explicar.

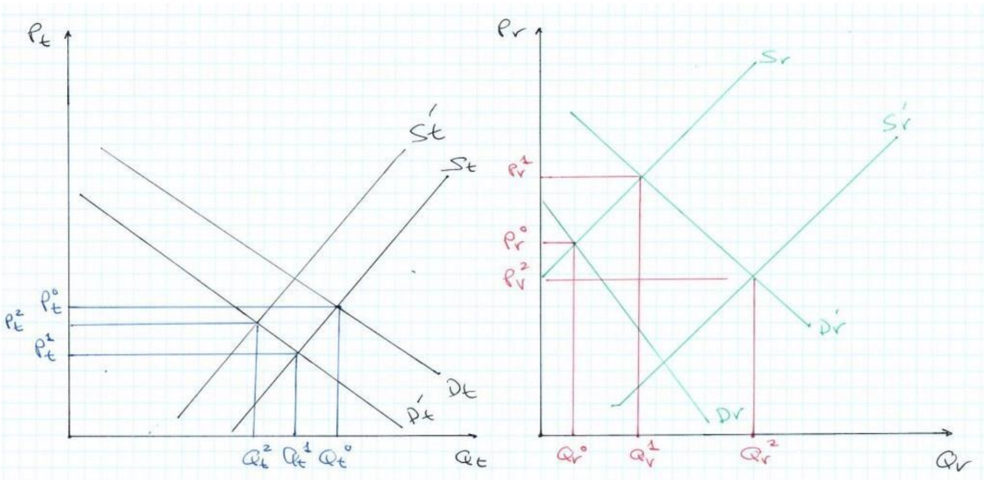
Mencionar la hipótesis de Heilbroner sobre la aparición de economistas.

El mercado como asignador de recursos.

Concepto de mercado (Pindyck y Rubinfeld, página *8*.)

El cambio de vestimenta en los años *70*. Basado en el ejemplo de Adam Smith en la obra “An inquiry into the nature and causes of the wealth of nations”.

En algún momento de los años *70* la gente empezó a usar pantalones vaqueros y dejó de usar pantalones de tipo más clásico.



Pantalones Clásicos *Pantalones vaqueros*

Explicación:

1. Los consumidores quieren usar pantalones vaqueros en vez de los pantalones clásicos.

Desplazamiento a la derecha de la curva de demanda de vaqueros (D_v a D_v').

Desplazamiento a la izquierda de la curva de demanda de clásicos (D_t a D_t').

Sube el precio de los vaqueros (P_v^0 a P_v^1) y baja el precio de los clásicos (Pt^0 a P_t^1).

2. Con los nuevos precios, buscando beneficios, los fabricantes de pantalones reorganizan sus fábricas. Producen más vaqueros y menos clásicos (reasignan recursos, asignan recursos a los pantalones vaqueros).

Desplazamiento de la oferta de vaqueros a la derecha (S_v a S_v').

Desplazamiento de la oferta de clásicos a la izquierda (S_t a S_t').

Aumentan la cantidad de vaqueros en la economía y se reduce la de clásicos.

Resumen.

El mecanismo de mercado a través de los precios ha conseguido que *Recursos Escasos* (maquinas, trabajadores) que se dedicaban a producir clásicos se dediquen ahora a producir vaqueros. Este cambio es la respuesta del mercado a un cambio en las preferencias de los consumidores. En este caso, la *asignación de recursos* surge de las decisiones independientes de individuos buscando su bienestar.

Asignación de recursos y eficiencia.

La *eficiencia* consiste en obtener el máximo bienestar con unos determinados recursos o conseguir un determinado nivel de bienestar con los mínimos recursos. La *eficiencia* se considera una propiedad deseable de cualquier sistema económico. De otro modo, hay un uso incorrecto de *recursos escasos*.

Ejemplo de eficiencia.

En el sistema de mercado, la competencia hace que la provisión de bienes se haga al mínimo coste ***dada la tecnología y los precios de los factores*** (eficiencia). La razón es que, a largo plazo, los beneficios extraordinarios atraen otros productores al mercado (asignación de recursos hacia los productos relativamente escasos). La competencia hace que las empresas bajen el precio del producto para conseguir o mantener clientes. Esta bajada de precio continúa hasta que los beneficios extraordinarios son nulos. El productor que no minimiza costes incurre en pérdidas y tiene que abandonar el mercado.

Coordinación de las decisiones económicas.

La coordinación de las decisiones económicas es otro objetivo deseable de un sistema económico.

En una economía de mercado, los precios proporcionan información sobre la escasez relativa de un bien (precio alto). Buscando beneficios, los productores dedican recursos a la producción de ese bien escaso. Debido al precio alto, los consumidores buscan alternativas a ese bien escaso. Es decir, buscan ***bienes sustitutivos*** más baratos.

Ejemplo 1: predicciones sobre el agotamiento del petróleo.

Las predicciones sobre agotamiento del petróleo han fallado estrepitosamente durante las últimas décadas. En los años *70*, las reservas de petróleo estaban calculadas en unos *30* años de consumo. Es decir, el agotamiento tendría lugar a finales del siglo *XX*. Al final, del siglo *XX* el agotamiento estaba previsto para mediados del siglo *XXI*. La explicación de tales errores de predicción es la siguiente:

La escasez de petróleo aumenta su precio y el de sus derivados (gasolina, gasóleo, etc.). Como consecuencia se producen los siguientes efectos:

a. Las compañías petrolíferas buscas nuevas reservas y nuevas técnicas de extracción ya que es interesante poder vender algo que tiene un alto precio.
b. Los fabricantes de coches fabrican modelos que gastan menos
c. Los consumidores buscan alternativas. Por ejemplo, los europeos pagan mucho más cara la gasolina. Como consecuencia, viven en ciudades más densas y usan el transporte público.

La combinación de estos efectos hace que la cantidad de reservas aumente (descubrimiento de pozos, técnicas de extracción) y el consumo se modere. Como resultado, las predicciones de agotamiento han fallado siempre en las últimas décadas.

Ejemplo 2: Uber, tarifas dinámicas (surge) versus la publicidad de los taxis tradicionales (yellow cab)

Asignación y distribución.

Los precios del producto remuneran a los factores dedicados a la producción de ese producto. Por tanto, los factores dedicados a producir un producto relativamente escaso suben de precio.

Ejemplo.

Las empresas tecnológicas contratan investigadores y profesores de universidad con experiencia en *Inteligencia Artificial* pagando más de lo que puede permitirse una institución educativa.

1.2. Concepto de modelos y tipos.

Essentially, all models are wrong, but some are useful.
George Box.

Un *Modelo* es una representación simplificada de la realidad.

Un mapa o un plano de una ciudad son ejemplos de *Modelos*, una representación simplificada de la ciudad. Una maqueta o unas fotografías serían una representación más fiel de una ciudad pero no siempre más útil. Sólo hace falta imaginarse intentado buscar un lugar en una gran ciudad con un libro de fotografías o con una maqueta. Sin embargo, es necesario reconocer que el mapa puede ser demasiado simplificado y, en muchas ocasiones, ignora detalles que pueden ser relevantes.

Tipos de Modelos.

Los alumnos conocen los ***modelos gráficos y matemáticos***. Por ejemplo, el modelo de oferta-demanda o el modelo *IS-LM*. Sin embargo, existen ***modelos verbales*** que son tremendamente útiles para comprender un

determinado fenómeno. Se trata de historias muy simplificas que permiten ver con claridad las características fundamentales de ese fenómeno. Un buen ejemplo, es la brillante descripción de la esencia de la política monetaria que *hace Paul Krugman* en el libro divulgativo "Vendiendo prosperidad". La política monetaria se explica a través de las desventuras de un grupo de padres de niños pequeños que tratan de dirigir una cooperativa de guardería. Los libros divulgativos de Krugman ("La era de las expectativas limitadas", "Internacionalismo moderno", …) y sus artículos en la prensa contienen un buen número de modelos tan brillantes como éste. En este sentido, su manual introductorio de microeconomía puede ser muy útil para aprender economía.
Otros modelos verbales: la máquina que transforma trigo en aparatos de alta tecnología. Esta historia ilustra las similitudes entre el comercio internacional y la tecnología. Sin embargo, es más frecuente encontrar críticas al comercio internacional que a la tecnología.

Modelo hidráulico de Philips. Relacionado con el Modelo del *Flujo Circular de la Renta*. Distinguir *ordenadores analógicos* de *ordenadores digitales*.

Características de los Modelos Microeconómicos.

1. Simplificación de la realidad
2. Optimización condicionada. Se modeliza el comportamiento de los agentes como el resultado de un proceso de optimización condicionada.
   Algunos ejemplos:
   - Maximización del bienestar sujeto a una restricción presupuestaria.
   - Minimización del gasto sujeto a un nivel de bienestar.
   - Minimización de costes sujeto a una restricción tecnológica y unos precios de mercado.

Las ventajas de esta aproximación son:

a. La estructura matemática es bien conocida.
b. La generalidad del planteamiento (ejemplo: la posición de las hojas de un árbol, la caída libre de un objeto)

1.3. Componentes de un modelo.

In principle, models do not require math, and it is not math that makes the model useful or scientific.
Verbal arguments that seem intuitive often collapse, or are revealed to be incomplete, under closer mathematical scrutiny. The reason is that "verbal models" can ignore non obvious but potentially significant interactions.
Dani Rodrik, Economics Rules

El tratamiento matemático exige mayor rigor en el planteamiento. Por ejemplo, mayor claridad en las definiciones y en los supuestos. Es una forma de disciplina en el pensamiento. Adicionalmente, permite tratar cuestiones que no son abordables con la modelización verbal o gráfica.

Variables: son representantes genéricas de un conjunto.
Funciones: definen relaciones entre variables.
Ecuaciones: proporcionan una representación matemática de las funciones.

$$C = a + bY$$

Igualdades: se cumplen para un número reducido de valores de las variables.

$$2x + 7 = 8$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Identidades: representan definiciones. Se cumplen para todos los valores de las variables.

$$Y \equiv C + I + G$$
$$(x + y)^2 \equiv x^2 + y^2 + 2xy$$

Variables Exógenas: su valor se determina fuera del modelo.
Variables Endógenas: su valor se determina en el modelo.

La distinción entre *Variables Endógenas* y *Variables Exógenas* es parte esencial del proceso de modelización. De hecho, supone una simplificación al reconocer que hay variables que no se van a explicar si no que su valor se toma como dado.

1.4. Concepto de equilibrio y estática comparativa.

Equilibrio.

Una situación en la que los agentes no tienen incentivos para cambiar su comportamiento. El concepto de equilibrio es criticado frecuentemente por tratarse de un concepto teórico de difícil observación.

Un ejemplo sugerido por Paul Krugman y Robin Wells en su libro introductorio de Microeconomía aclara este punto. Estos autores afirman que la longitud de la cola en un supermercado es el resultado de un equilibrio. La gente está a la cola y no tiene ningún incentivo para abandonarla. Sin embargo, si se abre una segunda caja registradora sabemos que la gente se distribuirá, aproximadamente, en dos colas de la misma longitud. No es posible hacer una predicción sobre cómo se producirá esa distribución ni cuánto tardará, pero sí podemos estar seguros de la longitud final de la cola y de que se producirán los movimientos necesarios para que este resultado se materialice. Es posible imaginar una situación en que se abran varias cajas a la vez, se cierre alguna por descanso o cambio de turno del empleado, etc. La dificultad de observar un equilibrio en este caso, no cambia el hecho de existe una tendencia subyacente a formar colas de longitud similar.

Este ejemplo es un buen argumento en contra de críticas al equilibrio por ser un concepto abstracto, por ser de poca utilidad o por ser un concepto marcadamente estático en una economía fundamentalmente dinámica.

Comportamiento optimizador de los agentes.

La predicción precisa sobre la longitud de la cola depende del supuesto de comportamiento optimizador. En concreto, es necesario suponer que los clientes del supermercado tratan de minimizar el tiempo que pasan en la cola.

Análisis de Estática Comparativa.

Analiza los cambios en *Variables Endógenas* ante cambios en *Variables Exógenas*.

Un cambio en una *Variable Exógena* modifica el *Equilibrio*. Los agentes no están conformes con su decisión anterior. Se modifica el *Equilibrio* y, en ese equilibrio, las *Variables Endógenas* toman nuevos valores.

En el ejemplo de los pantalones, las preferencias de los consumidores son exógenas. Su cambio produce cambios en las *Variables Endógenas* del modelo: los precios y cantidades de los distintos pantalones.

En el ejemplo de las cajas registradoras, la *Variable Exógena* es el número de cajas registradoras abiertas, la *Variable Endógena* es la longitud de las colas ante cada caja.

1.5. Conceptos matemáticos básicos.

Función.

Establece una relación entre dos *Variables*. Se representa como: $y = f(x)$.

Ejemplos.

y representa el gasto y x representa el número de refrescos que tomas en un local de ocio. Escribe la función si el precio de cada refresco es de *2 €*.

Otro caso sencillo puede ser la siguiente función de gasto lineal: $y = 10 + 2x$.

Interpretar *10*. Interpretar *2*.

Es importante saber "leer" la ecuación. En este caso, el *Gasto* es de *10* unidades monetarias aunque no tomes ningún refresco (*x = 0*, *Gasto Fijo*). El *Gasto Total* se incrementa en *2* unidades SIEMPRE

cuando el consumo de refrescos aumenta en *1* unidad (*Gasto Variable*).

¿Cuánto aumenta el *Coste* (*y*) al aumentar la producción (*x*) en *1* unidad en el siguiente caso?

$$y = 10 + 2x + 0,5x^2$$

La *Función Constante*: $y = 10$.

¿Es una función de *x*? $y = 10 + 0x$.

¿Representación gráfica?

Otros ejemplos de función pueden ser:

i) La relación entre Salario y Educación.

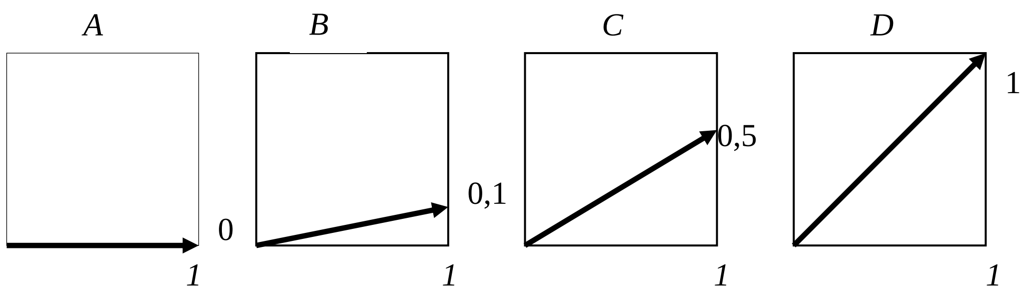
ii) La relación entre la probabilidad de encontrar empleo y el nivel educativo alcanzado.

Cociente o Ratio.

Mide el número de unidades del numerador que le corresponde a cada unidad del denominador. Ejemplo: *200.000.000 euros/20.000.000 personas=10 euros/persona*

Dividir es comprobar cuantas veces el denominador está contenido en el numerador. Es una operación de medida. La medida es el primer paso para el análisis de un fenómeno.

Pendiente



La *Pendiente* mide cuanto cambia la variable dependiente cuando la variable explicativa se **incrementa** en ***1* unidad**.

La inclinación de las flechas ilustra el concepto de *Pendiente*. En el cuadro *A*, la flecha avanza una unidad y se eleva *0*. La *Pendiente* se calcula dividendo altura por desplazamiento, es decir, en este caso es *0*. En el cuadro *B*, la flecha avanza una unidad y se eleva *0,1*. La *Pendiente* se calcula dividiendo *0,1* entre *1*. La *Pendiente* en el cuadro *C* es *0,5* y en el cuadro *D* toma el valor *1*.
La *Pendiente* coincide con la tangente trigonométrica del ángulo que forma la flecha con el lado inferior del cuadrado.
La *Pendiente* se puede ver como el instrumento matemático que mide la relación entre dos variables. La pendiente vendría dada por el siguiente cociente: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

La *Pendiente* mide el cambio en la *Variable Dependiente* (*y*) asociada a un incremento de *1* unidad en la *Variable Independiente* (*x*).
Las flechas de la figura anterior pueden verse como representaciones gráficas de las siguientes funciones lineales:

$$\text{a) } y = 0x = 0 \quad \text{b) } y = 0{,}1x$$
$$\text{c) } y = 0{,}5x \quad \text{d) } y = x$$

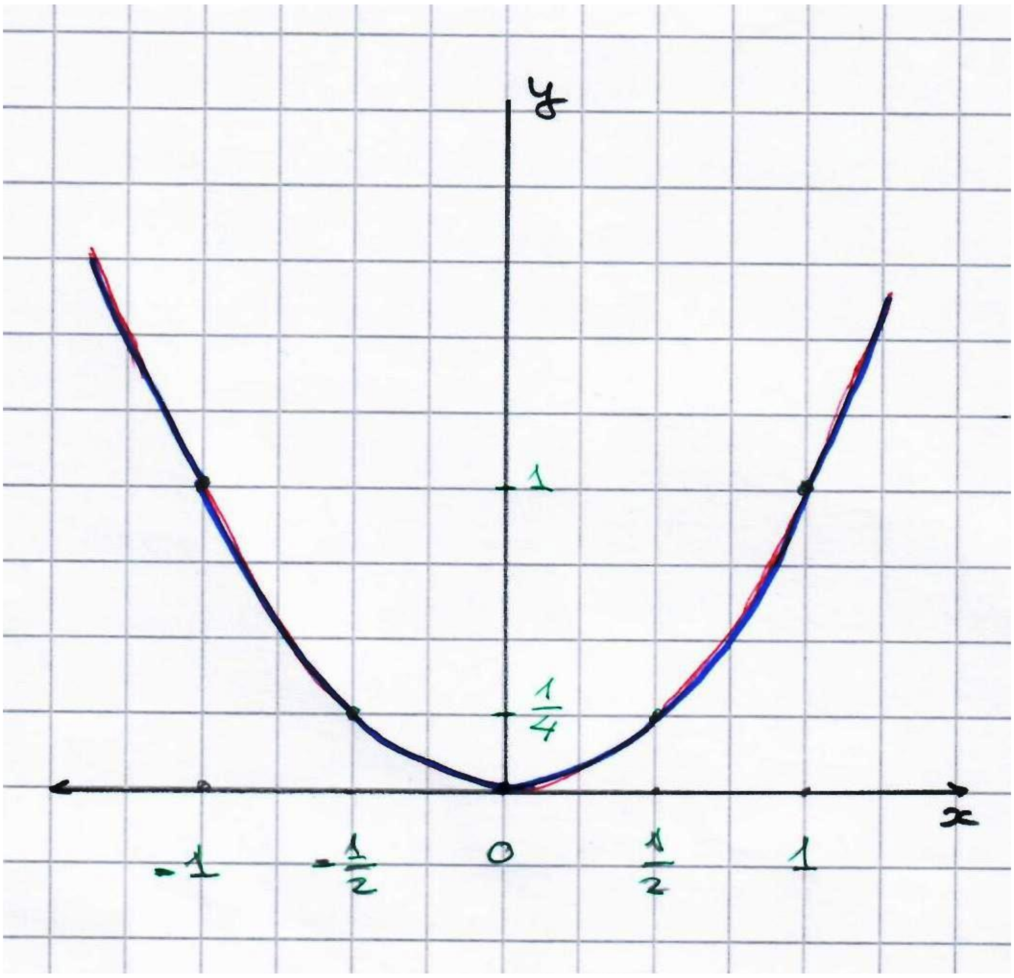
cuando $x \in (0,1)$.

Las pendientes son, respectivamente:

$$\text{a) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad \text{b) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}1$$
$$\text{c) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}5 \quad \text{d) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

Refinando el concepto de pendiente.

Representación gráfica de la función $y = x^2$.



a. Calcular la pendiente cuando $x = -1$.
b. Estimar el signo de la pendiente de forma visual cuando $x = -\frac{1}{2}$.
c. Calcular la pendiente cuando $x = -\frac{1}{2}$.

Concepto de Derivada de una función y = f(x).

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Mide el cambio en la *Variable Dependiente* (*y*) cuando la *Variable Independiente* (*x*) aumenta en *1* unidad (la medición se hace en un punto concreto).

La notación es la siguiente:

$$y' = f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

A continuación, estudiamos la relación entre *Pendiente* y *Derivada* de una función. En primer lugar, analizamos el concepto de *Derivada* en una recta.

$$f(x) = a + bx.$$

Un incremento de *x* tiene el siguiente efecto en la función:

$$f(x+\Delta x) = a + b(x+\Delta x) = a + bx + b\Delta x.$$

El incremento en la función cuando aumenta *x* es:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = b\Delta x.$$

El incremento en la función por unidad de cambio de *x* viene definido por el cociente:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{b\Delta x}{\Delta x} = b.$$

En este caso, la *Derivada* es un número real *b* (la pendiente) que no cambia con el valor de *x*.

En segundo lugar, analizamos el concepto de *Derivada* en una función cuadrática (parábola). Un incremento de *x* tiene el siguiente efecto en la función:

$$f(x) = ax^2$$

$$f(x+\Delta x) = a(x+\Delta x)^2 = a\left(x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x\right) = ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta^2 x$$

El incremento en la función cuando aumenta *x* es:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = 2ax\Delta x + a\Delta^2 x.$$

El incremento en la función (variable dependiente) por unidad de cambio de *x* viene definida por el cociente:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{2ax\Delta x + a\Delta^2 x}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x$$

En este caso, el valor de este cociente depende de la magnitud del cambio en *x* (Δx). Este resultado se evita tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2ax + a\Delta x = 2ax$$

Haciendo que el incremento sea muy pequeño ($\Delta x \to 0$ *) conseguimos evaluar el cambio de y ante un cambio unitario en x* ***en el entorno del punto de evaluación***.

La Derivada de una función no lineal depende del punto (valor de x) en que se evalúe. Por ejemplo, la Derivada de una función cuadrática es una función lineal que toma valores distintos para distintos valores de x.

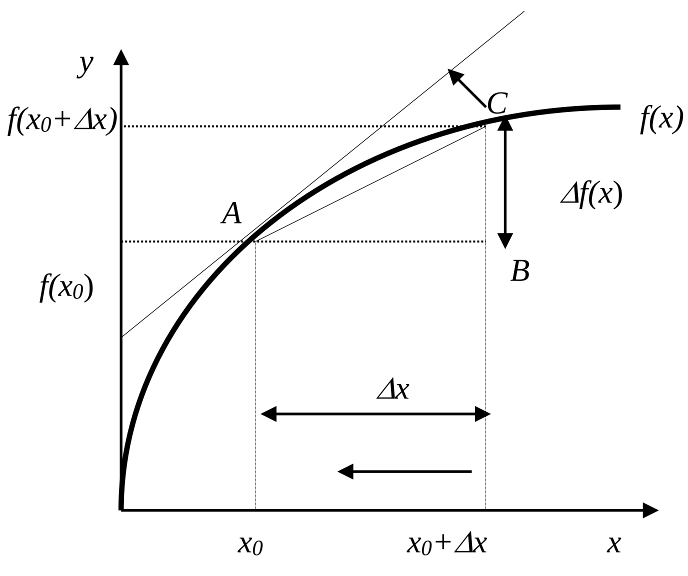
Derivada de una Derivada.

En el caso de la función cuadrática está claro que la derivada de una función es a su vez una función. Esta función puede ser derivada. La derivada de una derivada se denomina segunda derivada. La derivada de una segunda derivada se denomina tercera derivada, etc.

Interpretación geométrica de la derivada.

La derivada de una función (curva) evaluada en un punto es la pendiente de la tangente geométrica de esa función (curva) evaluada en ese punto.

Representación gráfica.



El triángulo rectángulo *ABC* tiene como base el incremento de x (Δx). La altura del triángulo coincide con el cambio en la función $(\Delta f(x))$. El cociente $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ es la tangente trigonométrica del ángulo que forman la hipotenusa y la base del triángulo rectángulo. A medida que hacemos pequeño el incremento de x $(\Delta x \rightarrow 0)$ la hipotenusa del triángulo se acerca a la tangente geométrica de la función $f(x)$ en el punto x_0. Es decir, que cuando hacemos pequeño el incremento de x el cociente $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ es la tangente trigonométrica de la tangente geométrica de la función $f(x)$.

Signo de las derivadas

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Estudiamos el efecto en una función del crecimiento de x. Es decir, estudiamos el caso en que el denominador (el incremento de x) es positivo. Si la función es creciente, el valor de la función aumentará con x, el numerador será positivo y, por tanto, la derivada positiva. Si la función es decreciente, el valor de la función disminuirá con x, el numerador será negativo y, por tanto, la derivada será negativa. A continuación, se muestran los dos ejemplos más sencillos de función creciente y decreciente:

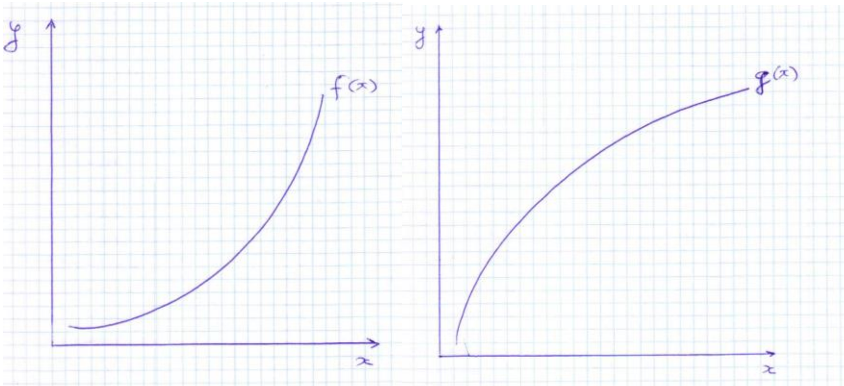
$$\begin{array}{ll} f(x) = x & g(x) = -x \\ f'(x) = 1 > 0 & g'(x) = -1 < 0 \end{array}$$

Aplicación del concepto de derivada segunda y signo de las derivadas

Función	$f(x)$	$g(x)$
Primera derivada	$f'(x) > 0$	$g'(x) > 0$
Segunda derivada	$f''(x) > 0$	$g''(x) < 0$

La función f representa un proceso que crece ya que la primera derivada es positiva. Además, crece cada vez más porque la segunda derivada es positiva y, por tanto, la primera derivada es creciente. Se trata de un proceso explosivo. La función *g* representa un proceso que crece ya que la primera derivada es positiva. Sin embargo, crece cada vez menos porque la segunda derivada es negativa y, por tanto, la primera derivada es decreciente. Se trata de un proceso atenuado.

Representación gráfica.

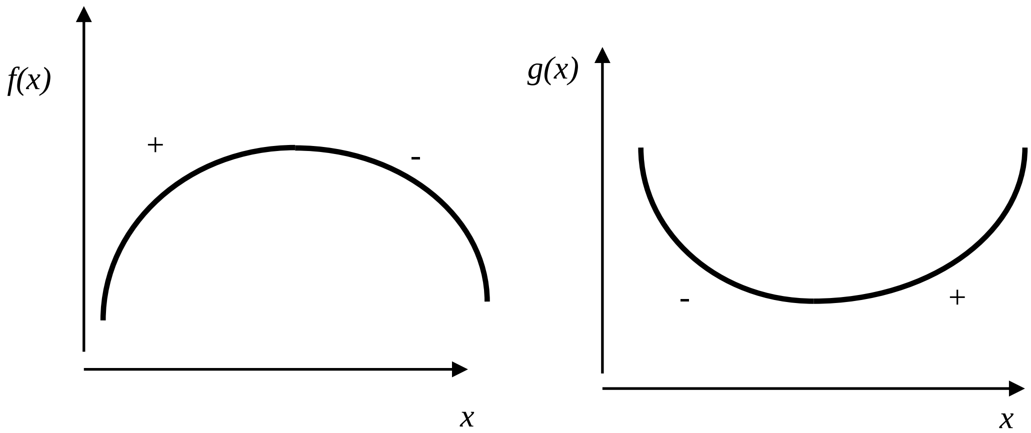


Optimización libre. Funciones de una variable.

Condición de primer orden.

La derivada de la función en un óptimo (mínimo o un máximo) tiene que ser nula.

Intuición gráfica



En un máximo la derivada pasa de ser positiva a negativa. Si la función es continua tiene que tomar necesariamente el valor cero. En un mínimo la derivada pasa de ser negativa a positiva. De nuevo, si la función es continua tiene que tomar necesariamente el valor cero.

Condición de segundo orden.

La segunda derivada en un óptimo permite identificar si se trata de un máximo o un mínimo.

La segunda derivada negativa indica un máximo. La segunda derivada positiva indica un mínimo.

Intuición gráfica.

En un máximo, la primera derivada pasa de ser positiva a negativa. Por tanto, la primera derivada decrece. Si la primera derivada es una función decreciente su derivada (segunda derivada) tiene que ser negativa.

En un mínimo, la primera derivada pasa de ser negativa a positiva. Por tanto, la primera derivada crece. Si la primera derivada es una función creciente su derivada (segunda derivada) tiene que ser positiva.

Ejemplo 1.

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$
$$f'(x) = 2x - 6$$
$$f''(x) = 2$$

$$f'(3) = 2 \times 3 - 6 = 0$$
$$f''(3) = 2 > 0 \Rightarrow \text{ minimo}$$

Ejemplo 2.

$$g(x) = -x^2 + 6x - 9$$
$$g'(x) = -2x + 6$$
$$g''(x) = -2$$

$$g'(3) = 2 \times 3 - 6 = 0$$
$$g''(3) = -2 < 0 \Rightarrow \text{ maximo}$$

Apéndice.

Una tabla de conocimientos básicos de matemáticas

Números Enteros		
Números Racionales	Fracciones	Cociente
Números Reales	Potencias y Raíces	
Funciones	Modelización	
Análisis Gráfico		