

TEMA 5

Decisiones de producción: oferta de producto y demanda de factores

Revisado en noviembre de *2023*.

5.1. Modelo de minimización de costes.....	2
5.2. Modelo de maximización de beneficios.....	14
Apéndice 1	27

5.1. Modelo de minimización de costes.

Coste.

El concepto que se usa es el de *Coste de Oportunidad*, es decir, la remuneración de un factor en la mejor alternativa posible.

Ejemplo 1: trabajo en una empresa familiar.

Se considera que los familiares que colaboran en el negocio tienen un coste de cero. Esto no es cierto, ya que podrían desarrollar una labor parecida en otra empresa. Esa remuneración no llega a la familia por estar ayudando en el negocio familiar. Por tanto, existe un *Coste de Oportunidad* que no siempre se tiene en cuenta.

Ejemplo 2: propietario de un local céntrico.

Alquilar ese local le supondría recibir 10 unidades monetarias al año sin realizar ningún esfuerzo. El propietario pone un puesto de periódicos. Tiene unas ventas de 20. Gastos diversos de 10 y gastos de personal de 3.

Beneficios Contables: $20 - 10 - 3 = 7$.

Beneficios Económicos: $20 - 10 - 3 - 10 = -3$.

El *Beneficio Económico* indica unas pérdidas de 3, luego el beneficio hubiera sido mayor si no hubieras hecho nada, ya que podrías haber alquilado el local y haber ganado 3 millones más. El *Beneficio Económico* nos permite comparar el coste que tienes con lo mejor que podrías haber hecho. Si se hubiera alquilado el local se obtendrían 10 en vez de 7. Además, desde el punto de vista social, la decisión de tener un puesto de revistas es mala, ya que si alguien estaba dispuesto a pagar 10 de alquiler es porque podía utilizar el local en una actividad que le reportara una cantidad superior a las 7 unidades monetarias del puesto de periódicos.

Ejemplo 3: servicio militar obligatorio.

Hasta hace algunos años los varones de edad comprendida entre 18 y 28 años tenían que hacer el servicio militar obligatorio. El argumento económico para no cambiar este sistema era que al gobierno le salía más barato el ejército obligatorio que el profesional (que es voluntario). Algunos números pueden aclarar esta cuestión. Suponemos 2000 soldados y 500 € de sueldo mensual para cada soldado.

	Obligatorio	Voluntario
Uso de recursos	<i>2.000 personas</i>	<i>2.000 personas</i>
Desembolso monetario	<i>0</i>	<i>1.000.000 €</i>
≠ Coste económico		

Los costes hacen referencia al uso de recurso, y en los dos sistemas se usan los mismos recursos. Por tanto, el coste tiene que ser igual en los dos sistemas. La única diferencia es el modo en que se distribuye el coste entre los ciudadanos. En el sistema voluntario el millón de euros lo pagan todos los contribuyentes. En el sistema obligatorio el coste recae sobre los soldados.

Finalmente, en un sistema voluntario las personas que acudan por un salario de 500 euros tendrán un *Coste de Oportunidad* menor a ese salario. En caso contrario no irían. En un sistema obligatorio, algunas personas tendrán un *Coste de Oportunidad* superior a esa cantidad. Un ejemplo claro sería el caso en que tuviesen que abandonar un empleo bien remunerado.

Ejemplo 4.

Coste de Oportunidad del retraso al recoger los niños de la guardería: sin multa y con multa. Gneezy, U. and Rustichini, A., 2000, "A Fine Is a Price", *Journal of Legal Studies*, 29(1): 1-17.

Análisis a corto plazo.

Existen *Factores Fijos* y *Factores Variables*.

Coste Fijo (CF): asociado al uso del factor fijo. Por ejemplo, el capital K .

Coste Variable (CV) asociado al uso del factor variable. Por ejemplo, el trabajo L .

$$CV = wL.$$

Donde, w es el precio del factor variable y L es el número de unidades usadas del factor variable.

Coste Total (CT):

$$CT = CF + CV$$

$$CT = CF + wL$$

Coste Marginal (CMG):

Es el incremento de coste asociado a producir una unidad más de producto:

$$CMG = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{\Delta CV}{\Delta Q}.$$

La misma expresión puede ser obtenida con derivadas si la *Función de Costes Totales* es derivable:

$$CMG = \frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{\partial CV}{\partial Q}.$$

Coste Medio (CME):

Es el coste de cada unidad de producto.

$$CME = \frac{CF}{Q} + \frac{CV}{Q} = CFME + CVME.$$

El *Coste Medio* es la suma del *Coste Fijo Medio (CFME)*: el coste fijo por unidad de producción) y el *Coste Variable Medio (CVME)*: coste variable por unidad de producción).

Determinantes del coste a corto plazo.

Coste Marginal

$$CMG = \frac{\Delta CV}{\Delta Q} = w \frac{\Delta L}{\Delta Q} = \frac{w}{\frac{\Delta Q}{\Delta L}} = \frac{w}{PM_L}.$$

Producto Marginal del factor variable decreciente implica *Coste Marginal* creciente

Coste Medio

Coste Fijo Medio:

$$CFME = \frac{CF}{Q}.$$

¿Creciente o decreciente con Q ?

Coste Variable Medio:

$$CVME = \frac{CV}{Q} = w \frac{L}{Q} = \frac{w}{\frac{Q}{L}} = \frac{w}{PME_L}.$$

Creciente si el producto medio del *Factor Variable* es decreciente.

Relación entre *Coste Medio* y *Coste Marginal*.

$$CME(w_x, w_y, z) = \frac{C(w_x, w_y, z)}{z}.$$

La relación entre el *Coste Medio* y el *Coste Marginal* es la siguiente:

$$C = z CME$$

$$CMG = \frac{\partial C}{\partial z} = CME + z \frac{\partial CME}{\partial z}$$

Existen tres casos:

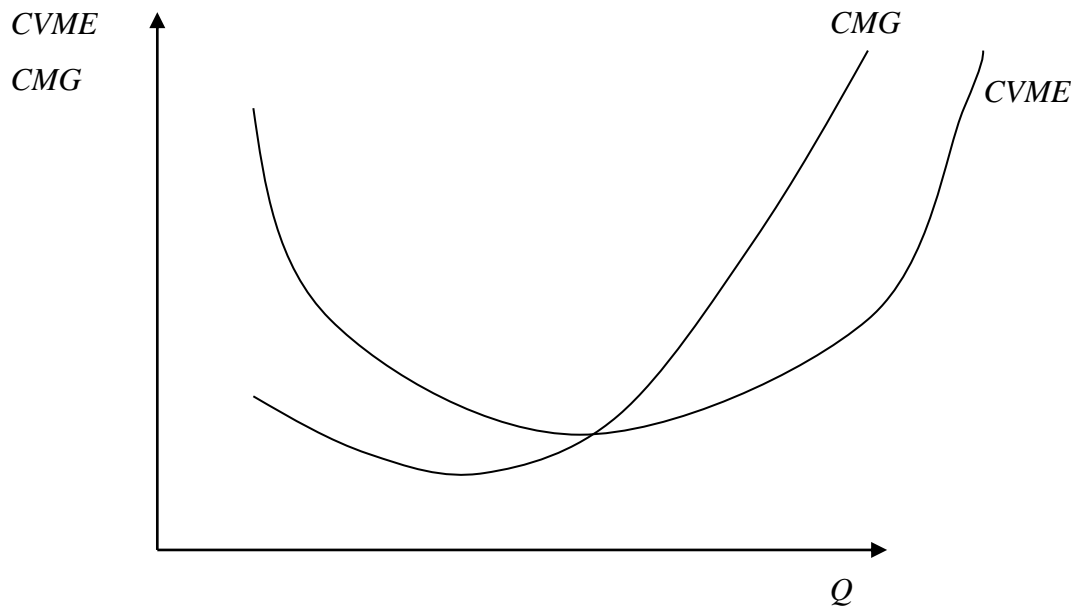
$$CMG > CME \Leftrightarrow \frac{\partial CME}{\partial z} > 0$$

$$CMG = CME \Leftrightarrow \frac{\partial CME}{\partial z} = 0$$

$$CMG < CME \Leftrightarrow \frac{\partial CME}{\partial z} < 0$$

Es decir, si el *Coste Medio* es creciente el *Coste Marginal* será mayor que el *Coste Medio*. Si el *Coste Medio* es decreciente, el *Coste Marginal* será menor que el *Coste Medio*. El *Coste Medio* y el *Coste Marginal* coinciden cuando el *Coste Medio* es mínimo.

La intuición de este resultado es la siguiente. El *Coste Marginal* es el coste de la última unidad producida. Si la última unidad aporta más al coste que la media de las anteriores (coste medio) el coste medio aumenta. Si la última unidad aporta menos al coste que la media de las anteriores la media (coste medio) disminuye. Por último, si aporta lo mismo que la media de las unidades anteriores el coste medio no cambia. La representación gráfica sería la siguiente:



Análisis a Largo Plazo.**Modelo de minimización de costes.**

Se *modelizan* las decisiones de los productores como si fuesen el resultado de minimizar el coste de producir *un determinado nivel de output* (cantidad de producto) dados los *Precios de los Factores* y la *Tecnología*.

El *Coste* se representa por:

$$C = w_x x + w_y y.$$

donde x e y son las cantidades de factores y w_x y w_y son los precios de dichos factores. Los factores x e y deben ser capaces de producir el nivel de producción deseado.

La representación gráfica de este problema requiere el uso de la *Isocuanta* (tema anterior) y de la *Isocoste*. Se denomina *Isocoste* al conjunto de factores que se pueden adquirir con un determinado *Coste*.

$$\text{Isocoste}(C_0) = \{(x, y) \mid C_0 = w_x x + w_y y\} \quad y = \frac{C_0}{w_y} - \frac{w_x}{w_y} x.$$

donde, C_0 es un determinado nivel de coste, y x e y son las cantidades de factores que se pueden adquirir con esa cantidad de dinero dados los precios de los factores w_x e w_y . La *Isocoste* tiene dos componentes. En primer lugar, el número de unidades que podría comprar del factor y si no usase ninguna unidad de x . Es decir: $\frac{C_0}{w_y}$. En segundo lugar, el *Coste de Oportunidad* de x

en términos de y , es decir, a cuantas unidades de y **tengo** que **renunciar** cuando incremento el x en una unidad **manteniendo**

el coste constante: $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{w_x}{w_y}$.

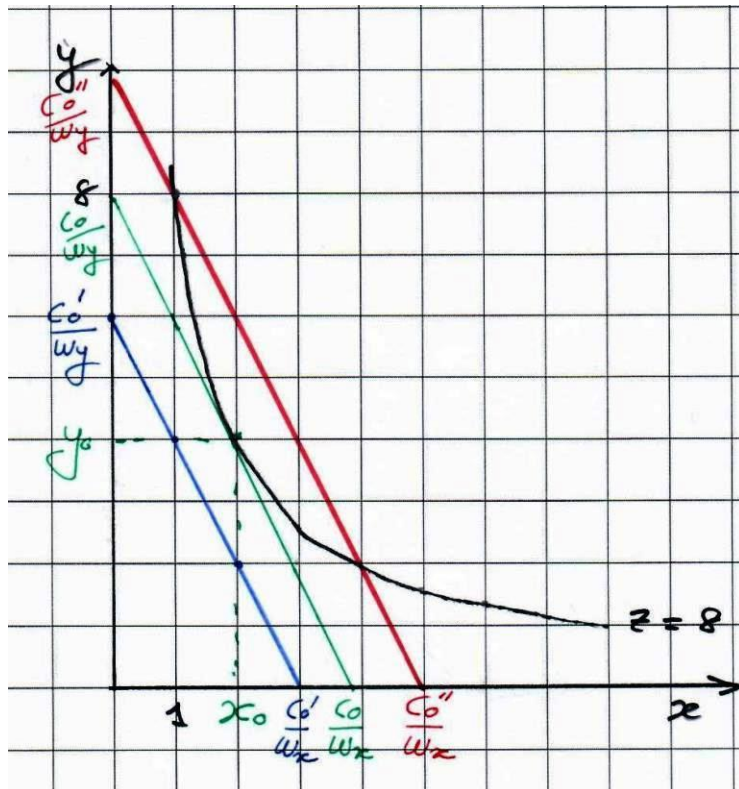
Es importante darse cuenta de que si fuese posible renunciar a más unidades de y el coste se reduciría. Esta idea será importante para entender la condición de minimización de costes.

Algunos ejemplos de Isocoste.

Coste	w_x	w_y	Isocoste	Isocoste
10	2	3	$2x + 3y = 10$	$y = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x$
20	2	3	$2x + 3y = 20$	$y = \frac{20}{3} - \frac{2}{3}x$
10	3	3	$3x + 3y = 10$	$y = \frac{10}{3} - x$

- Las *Isocostes* más a la derecha representan un *Coste* más alto.
- La *Pendiente* de la *Isocoste* está determinada por el cociente del *Precio de los Factores*.

La representación gráfica de la *Minimización de Coste* es la siguiente:



Dado un nivel de output y la tecnología, se minimizan costes en el punto de tangencia entre la *Isocuenta* y la *Isocoste*. Al mismo tiempo que minimizas costes eliges una combinación de factores dado el output deseado (x_0, y_0) . No se elige ningún punto por encima de la recta que pasa por los puntos $(0, \frac{C_0}{w_y})$

y $(\frac{C_0}{w_x}, 0)$ porque el coste sería más alto. No se elige ningún punto por debajo porque no se produciría el nivel de output deseado.

Condición de *Minimización de Coste*: $RMST_{xy} = \frac{w_x}{w_y}$.

Intuición sobre la condición de minimización de costes.

La $RMST_{xy}$ mide las unidades de y a las que ***podrías*** renunciar si aumentase una unidad de x **manteniendo la producción constante**. El coste relativo de los factores $\frac{w_x}{w_y}$ mide las unidades de y a las que ***tendrías***

que renunciar para **mantener el coste constante** si comprase una unidad más de x . Es el *Coste de Oportunidad* de x en términos de y .

Supongamos una situación donde: $RMST_{xy} = 4 > 2 = \frac{w_x}{w_y}$. Por una parte, una

unidad de x me cuesta $\frac{w_x}{w_y} = 2$ unidades de y . Por otra, una unidad de x

sustituye $RMST_{xy} = 4$ unidades de y . Por tanto, la sustitución podría reducir

el coste. Es decir, si $RMST_{xy} = 4 > 2 = \frac{w_x}{w_y}$ no estamos minimizando el coste

ya que es posible hacer una sustitución de y por x que reduce el coste.

Cuando incremento una unidad de x y reduzco unidades de y se reducirá la

$RMST_{xy}$. El proceso continúa hasta que: $RMST_{xy} = \frac{w_x}{w_y}$.

La decisión de *Minimizar Costes* determina las *Demandas de Factores de Producción*.

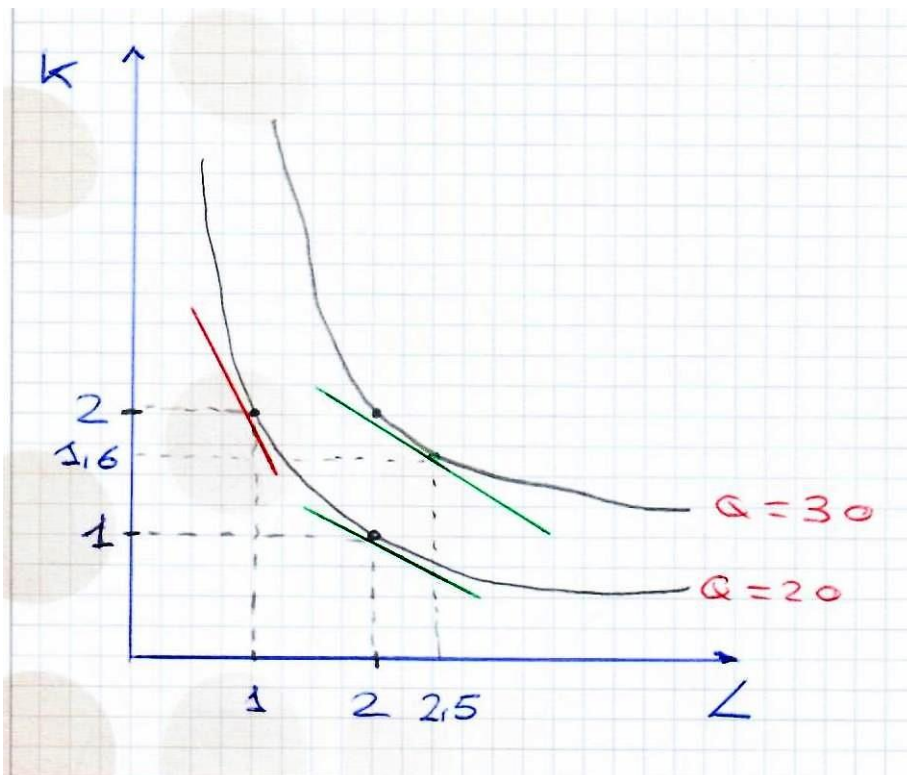
Se ha determinado las cantidades del factor x e y que minimizan el coste de producción para una determinada cantidad de output fijada por la *Isocuanta* y para unos precios de los factores w_x y w_y .

- Un cambio en los precios de los factores (w_x y w_y) cambiaría la decisión óptima (cambiaría la pendiente de la recta isocoste $\frac{w_x}{w_y}$).
- Un cambio en la cantidad producida desplazaría la *Isocuanta*. Por tanto, cambiaría la decisión óptima de x e y que minimizan el coste de producción.

Ejemplo: transportando mercancía.

Una empresa de transporte puede transportar 20 toneladas de mercancías con un camión grande ($K = 2$) y un conductor ($L = 1$) o con un camión pequeño ($K = 1$) y dos conductores ($L = 2$). Si quiere transportar 30 toneladas de mercancía tiene que añadir más horas de trabajo a esos camiones.

Las dos maneras de transportar 20 toneladas aparecen en la *Isocuanta* $Q = 20$. La *Isocuanta* $Q = 30$ contienen las formas de transportar 30 toneladas.



En un primer momento, la ratio de precios de los factores determina la pendiente de la *Isocoste* verde. En ese caso, la decisión que minimiza coste es usar el camión pequeño. Si sube el precio del trabajo, la pendiente de la *Isocoste* se incrementa (*Isocoste* roja). En ese caso, la decisión que minimiza coste es usar el camión grande. Si se quiere transportar 30 toneladas con los precios de los factores en la *Isocoste* verde, la decisión sobre los factores que minimizan costes cambia.

El ejemplo muestra la relación funcional entre las cantidades demandadas de factores, los precios de los factores y la cantidad producida. La notación matemática sería:

$$x = x(w_x, w_y, z) \quad y = y(w_x, w_y, z)$$

Un ejemplo sería la demanda de capital y trabajo que depende de los precios de estos factores y del nivel de producción.

La Función de Coste.

$$C(w_x, w_y, z) = w_x x(w_x, w_y, z) + w_y y(w_x, w_y, z)$$

Es el resultado de calcular el coste mínimo de producción con las cantidades demandas óptimas. El coste mínimo depende de la cantidad que se produce y de los precios de los factores.

Cuestiones adicionales.

1. Relación entre Rendimientos a Escala y Costes Medios.

$$CMe(w_x, w_y, z) = \frac{C(w_x, w_y, z)}{z}$$

i) Rendimientos Crecientes a Escala.

Duplicamos los inputs (se duplica el coste) y el output es más del doble. Por tanto, el *Coste Medio* es decreciente.

ii) *Rendimientos constantes a escala.*

Duplicamos los inputs (se duplica el coste) y se duplica el output. Por tanto, el *Coste Medio* es constante.

iii) *Rendimientos Decrecientes a Escala.*

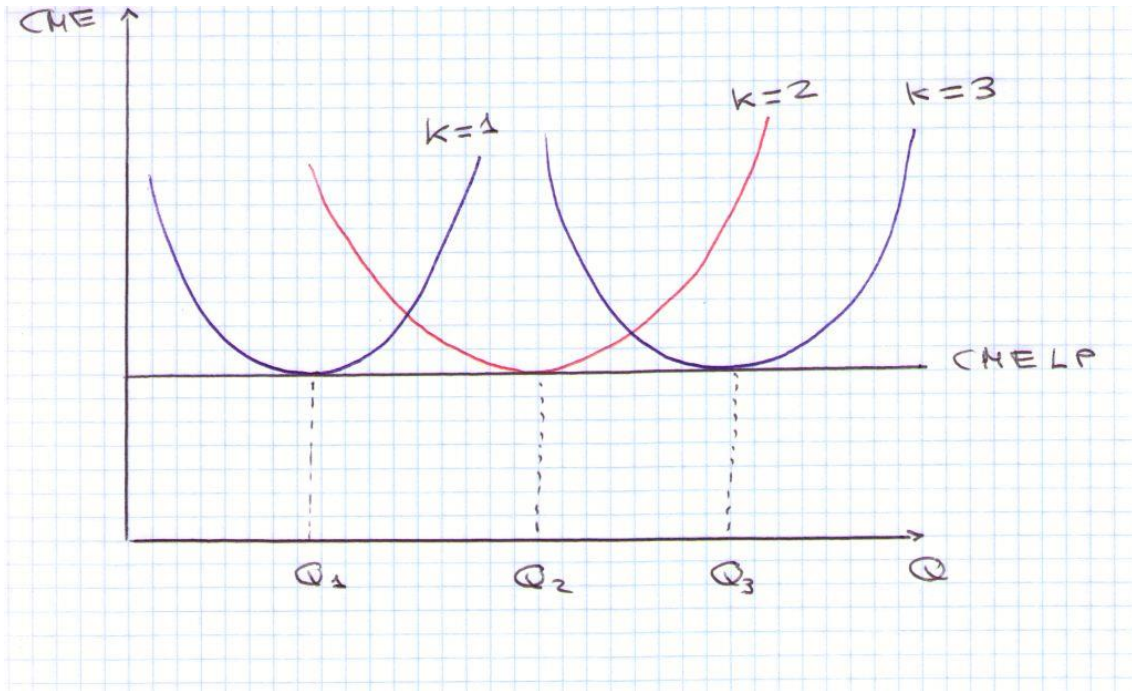
Duplicamos los inputs (se duplica el coste) y el output es menos del doble. Por tanto, el *Coste Medio* es creciente.

Estos resultados son estrictamente ciertos para *Funciones de Producción Homotéticas*. Estas funciones se caracterizan porque las *Isocuantas* son como clones de distintos tamaños. El tamaño es mayor pero la forma es idéntica. Por tanto, la ratio óptima de factores no cambia con la cantidad de output producida. Es decir, si una combinación (ratio) de factores es óptima también lo es otra con el doble o el triple de factores de producción. En este sentido, la duplicación de factores conduce a un nuevo óptimo si el punto de partida era un óptimo. Las *Funciones Homogéneas* son *Homotéticas*. Por ejemplo, la *Función de Producción Cobb-Douglas*.

2. Relación entre Costes a Corto Plazo y Costes a Largo Plazo.

El *Coste a Corto Plazo* tiene que ser mayor o igual al *Coste a Largo Plazo*. Si puedes ajustar un *Factor de Producción* adicional (*Largo Plazo*) no puedes tener un coste más alto que cuando ese *Factor de Producción* está fijo (*Corto Plazo*).

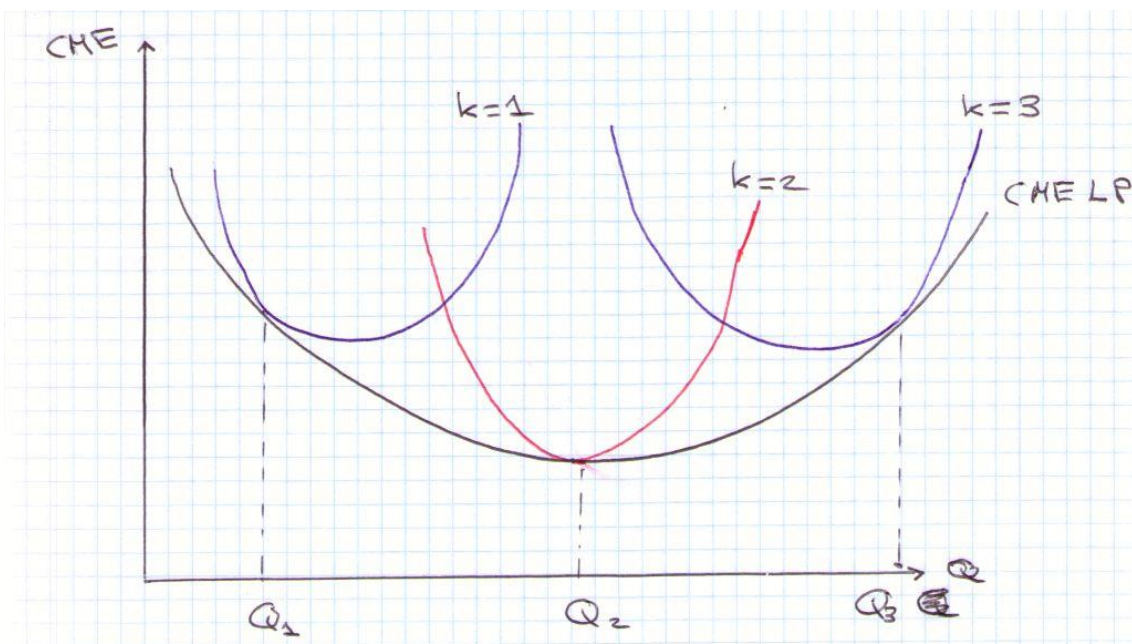
Representación gráfica con CME a Largo Plazo Constantes.



Alternativamente, se pueden dar las siguientes situaciones.

Economías de Tamaño: el *Coste Medio a Largo Plazo* se reduce con el nivel de producción

Deseconomías de Tamaño: el *Coste Medio a Largo Plazo* se incrementa con el nivel de producción.



5.2. Modelo de maximización de beneficio.

Beneficio = Ingresos Totales – Costes Totales.

Notación convencional: $\Pi = IT - CT$.

Una idea importante es que las tres magnitudes dependen del nivel de producción (q):

$$\Pi(q) = IT(q) - CT(q) = pq - CT(q)$$

Donde q es la cantidad producida por la empresa y p es el precio que recibe.

1. *Maximización de Beneficio* es un supuesto razonable sobre el comportamiento de la empresa.
2. *Maximización de Beneficio* es un **modelo** de la **elección de la cantidad producida**.

El modelo de *Minimización de Costes* es una pieza de este modelo.

Análisis de la Maximización de Beneficio.

¿Qué *Beneficio* genera producir 1 unidad adicional de output?

El *Beneficio Marginal* mide el incremento en el *Beneficio* asociado a incrementa 1 unidad la producción.

$$\frac{\Delta \Pi}{\Delta q} = \frac{\Delta IT}{\Delta q} - \frac{\Delta CT}{\Delta q}$$

$$BM = IM - CM$$

El *Ingreso Marginal* es el incremento del ingreso asociado a incrementar en 1 unidad la producción.

El *Beneficio Marginal* es igual al *Ingreso Marginal* menos el *Coste Marginal*. Si el *Beneficio Marginal* es positivo interesa producir esa unidad ya que incrementa el *Beneficio*.

Si el *Beneficio Marginal* es nulo ya no interesa producir más unidades. No se puede incrementar el *Beneficio*. El *Beneficio* es máximo.

De un modo más formal, el output que produce el *Beneficio* máximo se calcula derivando el *Beneficio* con respecto al output e igualando a cero:

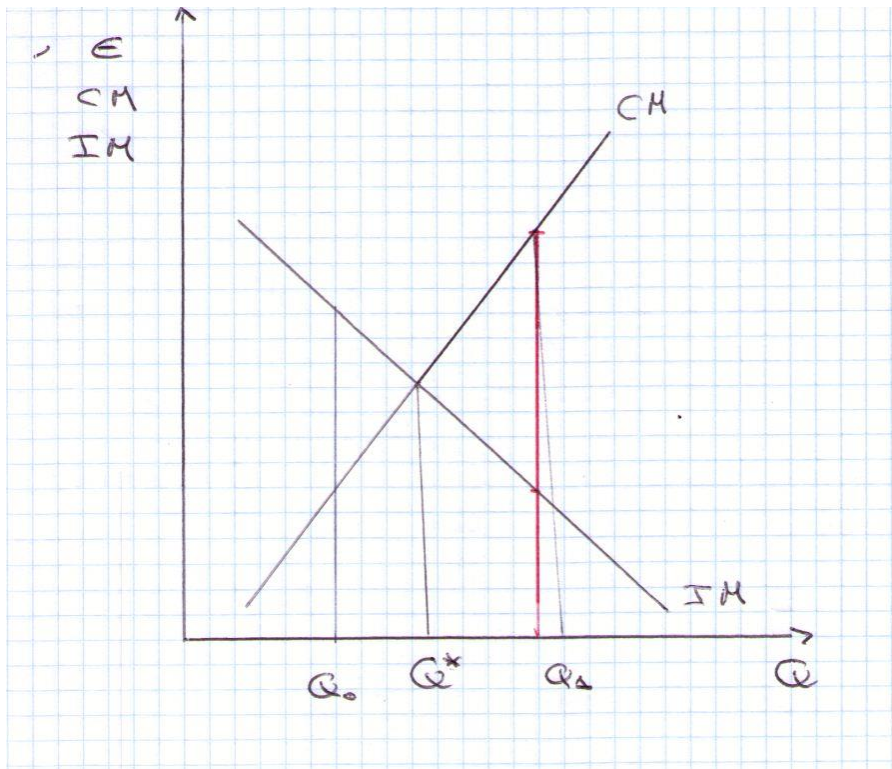
$$\Pi'(q) = IT'(q) - CT'(q) = 0$$

$$IT'(q) = CT'(q)$$

$$IM = CM$$

El *Ingreso Marginal* y el *Coste Marginal* se pueden calcular como derivadas con respecto al nivel de output. El resultado de este proceso es la regla de maximización de beneficio: *Ingreso Marginal* igual a *Coste Marginal*.

Representación gráfica de la Maximización de Beneficio.



La *Maximización del Beneficio* permite elegir la cantidad óptima de **output**.

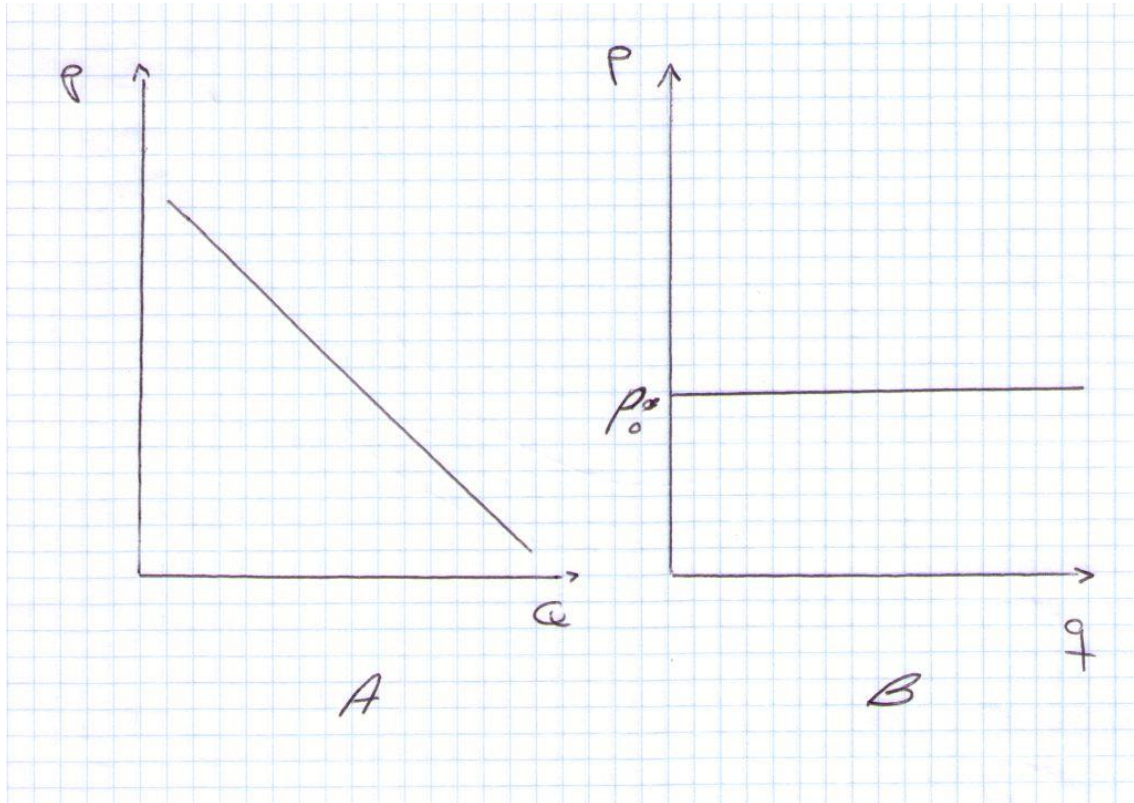
Maximización del Beneficio en un Mercado Competitivo de producto.

Características de un *Mercado Competitivo*:

- Libre entrada.
- Muchas empresas.

- La decisión de cada empresa no afecta los precios. Los precios son constantes cuando la empresa toma una decisión.

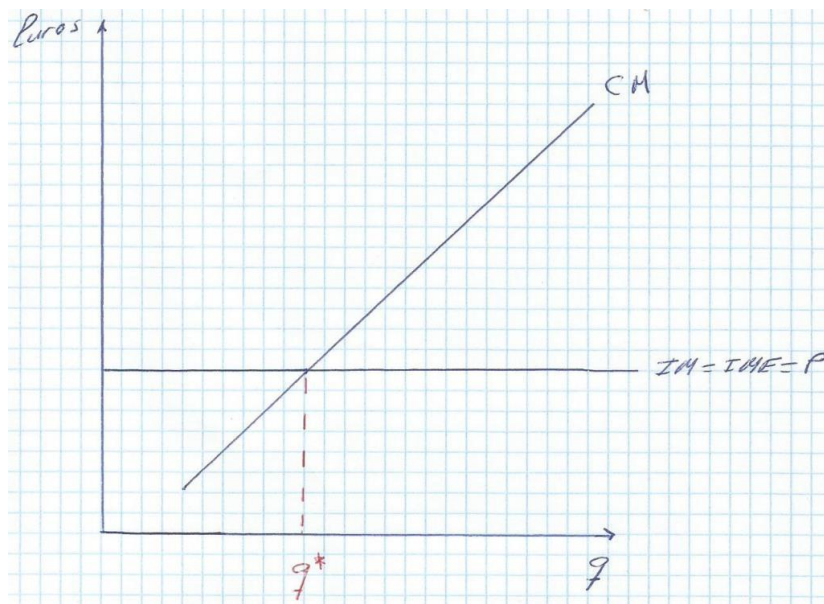
Formas de las curvas de *Demanda de Mercado* y de *Demanda de la Empresa* en *Competencia Perfecta*.



Implicaciones para el proceso de maximización. El precio se comporta como una constante cuando se cambia la producción de la empresa.

Detrás de todo este cálculo hay una cuestión sencilla. En *Competencia Perfecta* cada vez que produces una unidad más, ingresas su precio (no es necesario reducir el precio para vender una unidad más).

Representación gráfica de la decisión óptima de producción de una empresa en *Competencia Perfecta*.

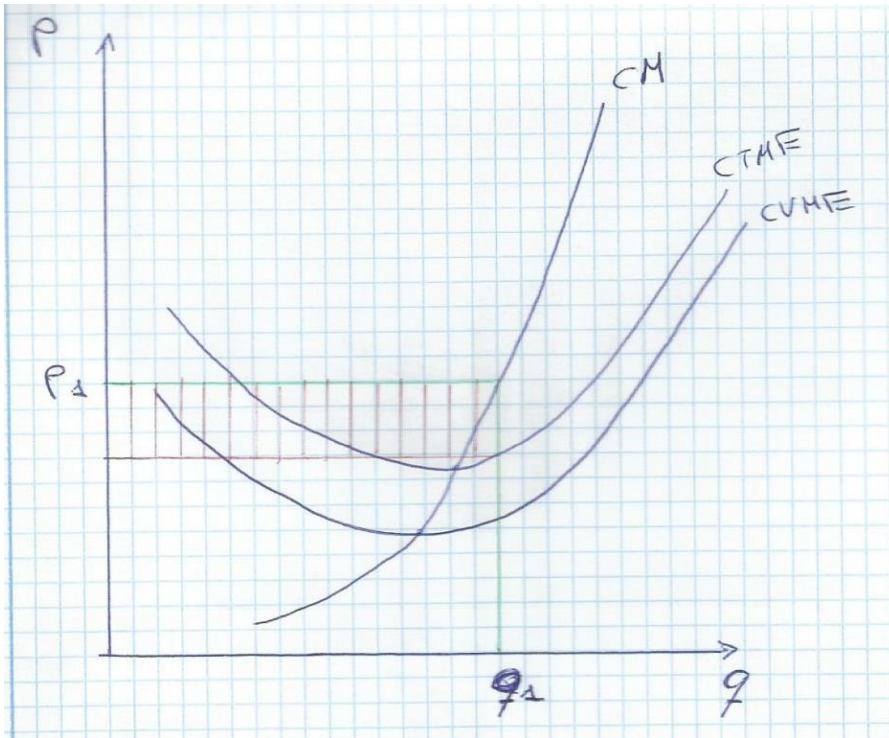


Probar con otros precios.

Es necesario matizar el resultado.

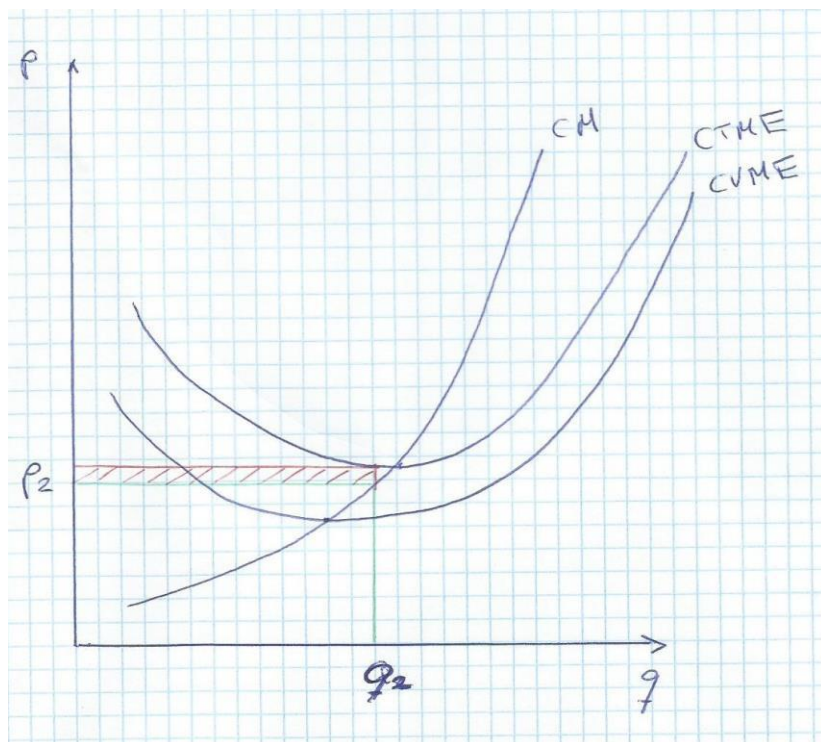
Decisión de producción de una empresa a *Corto Plazo* teniendo en cuenta diferentes curvas de costes.

Caso 1: *Beneficios Extraordinarios*.



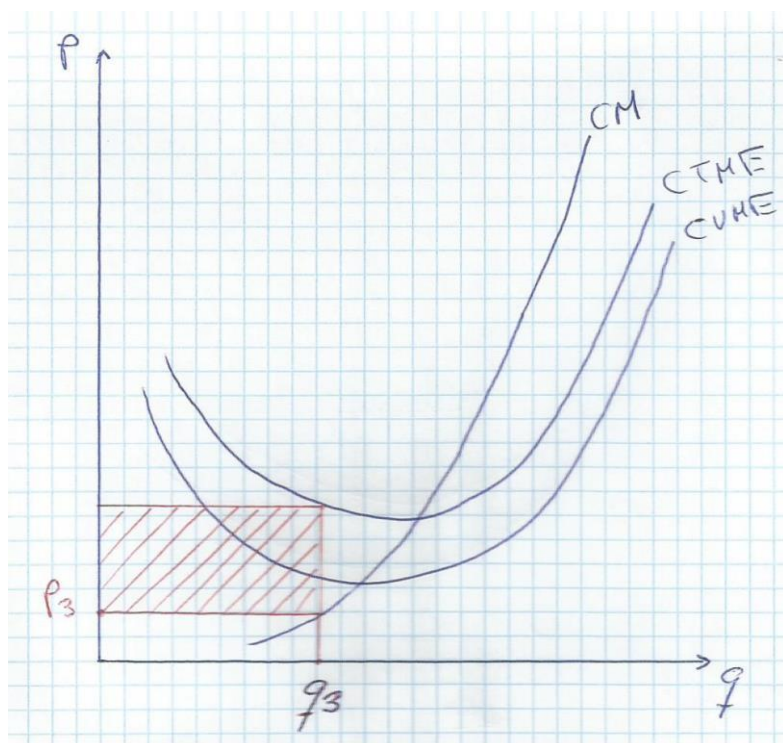
Decisión óptima: producir q_1 .

Caso 2: *Pérdidas Extraordinarias inferiores al Coste Fijo.*



Decisión óptima: producir q_2 .

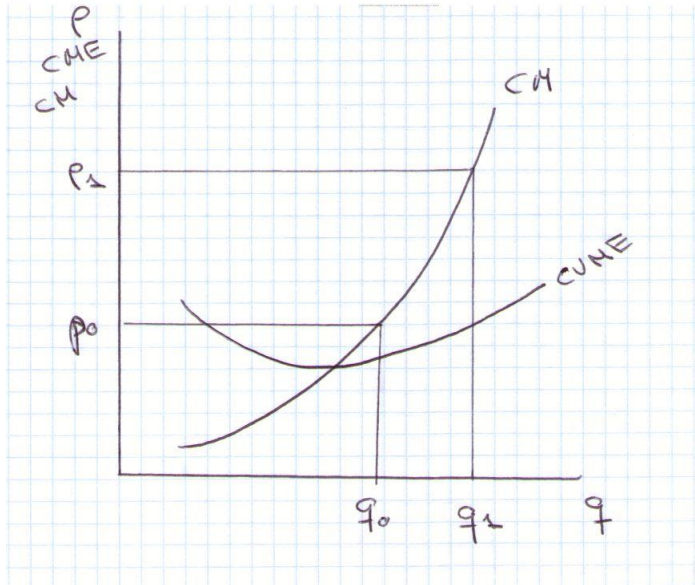
Caso 3: *Pérdidas Extraordinarias superiores al Coste Fijo.*



Decisión óptima: no producir.

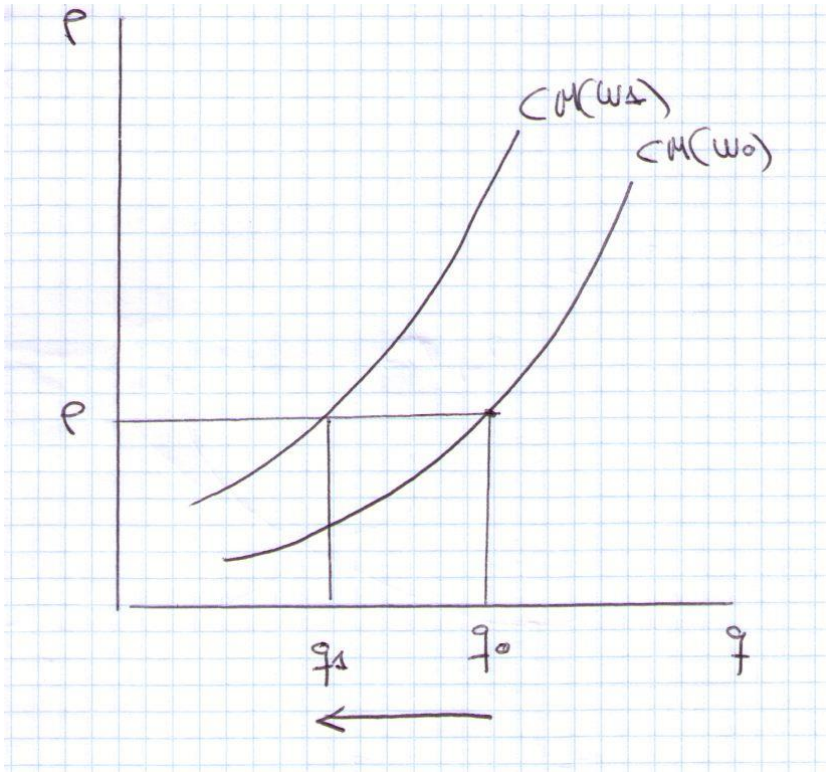
Curva de Oferta de la empresa a Corto Plazo.

La *Curva de Oferta* de la empresa a *Corto Plazo* coincide con la curva de *Costes Marginales* por encima de la curva de *Costes Variables Medios*.



Forma de la Función de Oferta: $P = CM(q)$. La Función de Oferta establece una relación entre precio del producto (P) y cantidad producida por la empresa (q).

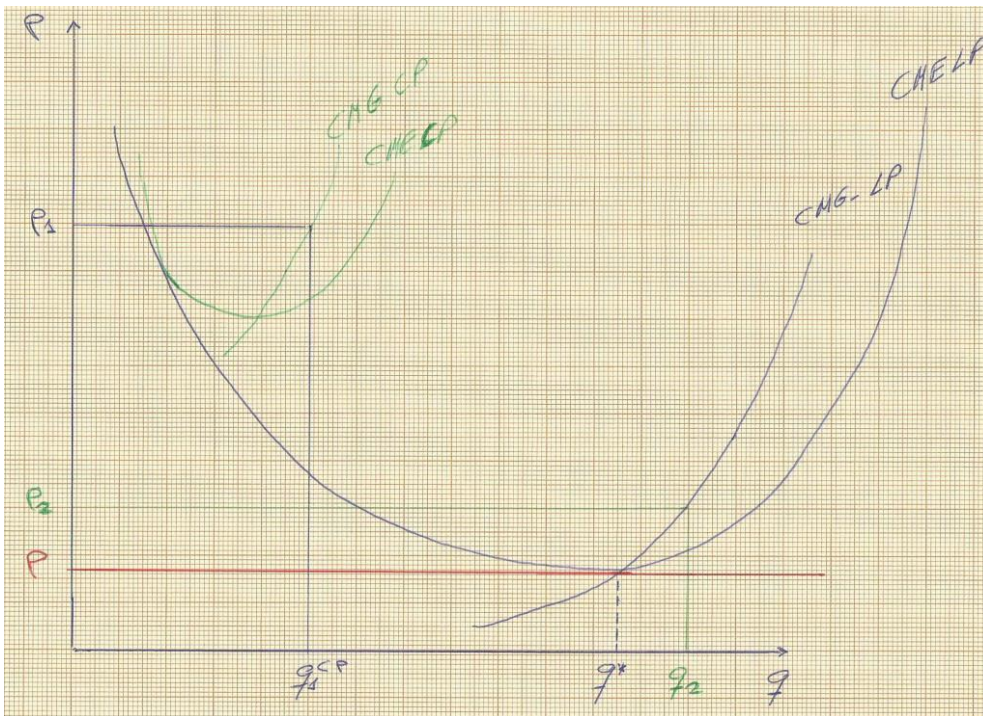
Efecto sobre la empresa de un incremento del precio de los factores. Se determina analizando el efecto sobre los *Costes (Marginales)* de una subida en el precio de los factores.



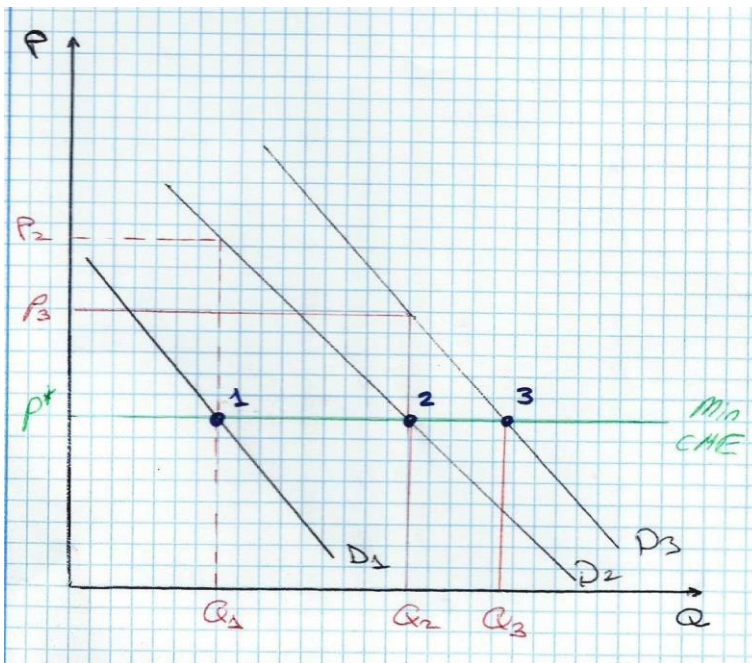
Curva de Oferta de mercado a Largo Plazo.

1. Entran empresas si hay *Beneficios Extraordinarios*. Al entrar empresas, aumenta la producción y baja el precio. El caso contrario es cierto también. Salen empresas si hay *Pérdidas Extraordinarias*. Al salir empresas, se reduce la producción y sube el precio.
2. ¿Cuántas empresas pueden entrar? La pregunta equivalente es: ¿Hasta qué nivel puede bajar el precio? El límite de bajada del precio viene dado por el mínimo del *Coste Medio a Largo Plazo*.

Representación de **una empresa a Largo Plazo**.



Representación del mercado.



P^* es el precio que coincide con el *Mínimo del Coste Medio a Largo Plazo*.

La cantidad demandada al precio P^* es Q_1 .

La cantidad Q_1 la producen un número de empresas produciendo la cantidad que minimiza el *Coste Medio a Largo Plazo*.

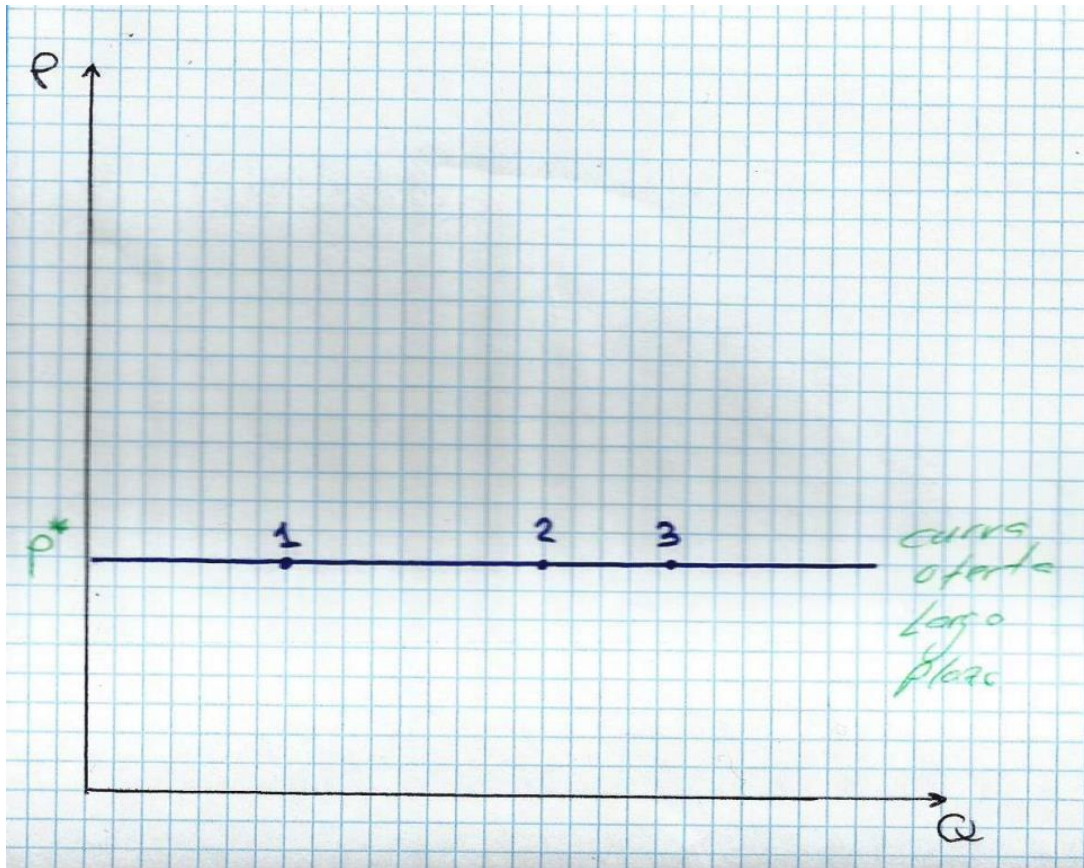
En primer lugar, se considera el caso en que la demanda se desplaza de D_1 a D_2 . En principio, la cantidad ofertada se mantiene en Q_1 . El precio tiene que subir hasta P_2 para que coincidan la cantidad demandada y la cantidad ofertada Q_1 . Ahora, al precio P_2 , hay *Beneficios Extraordinarios* y entran empresas. Como consecuencia, la cantidad ofertada aumenta hasta Q_2 donde el precio vuelve a ser P^* . Es decir, el precio que asegura beneficios extraordinarios nulos.

En segundo lugar, se considera el caso en que la demanda se desplaza de D_2 a D_3 . En principio, la cantidad ofertada se mantiene en Q_2 . El precio tiene que subir hasta P_3 para que coincidan la cantidad demandada y la cantidad ofertada. Al precio P_3 , hay beneficios extraordinarios y entran empresas. En consecuencia, la cantidad ofertada aumenta hasta Q_3 donde el precio vuelve a ser P^* . Es decir, el precio que asegura beneficios extraordinarios nulos.

La dinámica del mercado competitivo hace que se produzca en los puntos 1, 2 y 3 como consecuencia de los desplazamientos de la demanda. De hecho, se podría producir en cualquier punto de la recta horizontal al precio P^* .

Por tanto, la *Curva de Oferta a Largo Plazo de Mercado* se representa por esta recta horizontal. En otras palabras, la *Curva de Oferta a Largo Plazo de Mercado* es completamente elástica.

Curva de Oferta a Largo Plazo del Mercado



El *Equilibrio a Largo Plazo* tiene las siguientes características:

1. Precio igual al mínimo del *Coste Medio a Largo Plazo* (beneficios nulos, número de empresas estable).
2. Cada empresa produciendo la cantidad que da lugar a ese *Coste Medio Mínimo*.
3. Ante un cambio de *Precio*, el número de empresas cambia hasta que se produzca cualquier cantidad demandada al precio igual al mínimo del *Coste Medio a Largo Plazo*.

Impuestos y Subvenciones en Competencia Perfecta.

Análisis a Corto Plazo.

Un *Impuesto* o *Subvención* por unidad afecta al *Coste Marginal*. Por tanto, desplaza la *Función de Oferta* de la **Empresa**.

Análisis a Largo Plazo.

Es necesario ver cómo afecta el impuesto o la subvención al *Mínimo del Coste Medio a Largo Plazo*. Ese será el efecto sobre el *Precio* y, en consecuencia, la cantidad producida y el número de empresas.

Comentarios finales.

1. Polémica sobre la diferencia de precios entre un producto al ser cosechado y al ser vendido en una gran superficie. ¿Ganan mucho los intermediarios agrícolas? ¿Tienen beneficios extraordinarios? ¿Hay libertad de entrada?
2. El sector de la construcción puede ser usado como ejemplo de mercado no competitivo debido a las trabas burocráticas (planes urbanísticos y permisos) y limitaciones de suelo que impiden la libre entrada. No obstante, si la entrada no está limitada aparecen algunos de los resultados del modelo de competencia perfecta. *El Triunfo de las Ciudades* es un libro divulgativo de *Economía Urbana* escrito por el profesor de la *Universidad de Harvard*, Edward Glaeser. En este libro aparece un curioso ejemplo de mercado competitivo y no competitivo en el sector de la construcción. El mercado competitivo de construcción estaría localizado en el suroeste de Estados Unidos. La ausencia de restricciones a la construcción implica que el precio de una vivienda está muy ligado a su coste de construcción. Un incremento de la demanda de vivienda implica un incremento de la cantidad de vivienda y no afecta a su precio. En este modelo, las ciudades pueden crecer sin el freno que supone el incremento del precio de la vivienda. El ejemplo de mercado no competitivo estaría en Nueva York y en otras urbes americanas. En estas urbes, las restricciones urbanísticas a la construcción y la ausencia de suelo hacen que el precio de la vivienda sea muy superior a su coste de construcción. Ese precio podría producir beneficios a los

constructores, pero la regulación del suelo y su escasez hacen que no haya libre entrada. En este mercado, los incrementos de la demanda producen incrementos de precio. Este incremento de precio es un freno para la expansión geográfica y económica de la ciudad.

Apéndice 1

Función de Costes a Largo Plazo Cobb-Douglas.

Función de costes de una tecnología representada por una función de producción Cobb-Douglas

Función de Producción:

$$z = Ax^\alpha y^\beta$$

Productos marginales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha Ax^{\alpha-1} y^\beta$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \beta Ax^\alpha y^{\beta-1}$$

Relación marginal de sustitución:

$$RMST_{xy} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\alpha Ax^{\alpha-1} y^\beta}{\beta Ax^\alpha y^{\beta-1}}$$

$$RMST_{xy} = \frac{\alpha y}{\beta x}$$

Tangencia de la isocuanta y la isocoste:

$$RMST_{xy} = \frac{w_x}{w_y} \Rightarrow \frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{w_x}{w_y} \Rightarrow y = \frac{\beta}{\alpha} \frac{w_x}{w_y} x$$

Además, las cantidades de factor x e y deben poder producir la cantidad z . La condición anterior debe ser sustituida en la función de producción. Ese proceso da lugar a las siguientes funciones de demanda de factores.

Funciones de demanda de factores:

$$x = \left(\frac{w_x}{\alpha} \right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_y}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{z}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$y = \left(\frac{w_x}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w_y}{\beta} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{z}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Función de costes:

$$C = (\alpha + \beta) \left(\frac{w_x}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \left(\frac{w_y}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \left(\frac{z}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha + \beta}}$$

Función de costes medios:

$$\frac{C}{z} = (\alpha + \beta) \left(\frac{w_x}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \left(\frac{w_y}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha + \beta}} z^{\frac{1}{\alpha + \beta} - 1}$$

$$\frac{C}{z} = (\alpha + \beta) \left(\frac{w_x}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \left(\frac{w_y}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha + \beta}} z^{\frac{1 - (\alpha + \beta)}{\alpha + \beta}}$$

Con rendimientos constantes a escala ($\alpha + \beta = 1$) el exponente del nivel de output (z) es cero. Por tanto, el coste medio no depende del nivel de producción. Es decir, es constante.

Con rendimientos decrecientes a escala ($\alpha + \beta < 1$) el exponente del nivel de output (z) es positivo. Por tanto, el coste medio crece con el nivel de producción.

Con rendimientos crecientes a escala ($\alpha + \beta > 1$) el exponente del nivel de output (z) es negativo. Por tanto, el coste medio decrece con el nivel de producción.

Función de costes marginales:

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \left(\frac{w_x}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \left(\frac{w_y}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha + \beta}} z^{\frac{1}{\alpha + \beta} - 1}$$

Función de Costes a Corto Plazo Cobb-Douglas

En el corto plazo un factor de producción es constante. Por ejemplo, el factor de producción y . Despejando el factor de producción x en la función de producción se tiene que:

$$x^\alpha = \frac{z}{y^\beta A} \Rightarrow x = \left(\frac{z}{y^\beta A} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Esta es la demanda a Corto Plazo del factor de producción x .

El coste variable se puede escribir como:

$$CV = w_x \left(\frac{z}{y^\beta A} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

El coste total se puede escribir como:

$$CT = w_y y + w_x \left(\frac{z}{y^\beta A} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$