Revisado en septiembre de 2019

1.2. Matemáticas

El crecimiento de una cantidad a una tasa constante (caso discreto)

Una unidad de hoy a una tasa de crecimiento r se convierte en $1+r$ unidades en un periodo de tiempo (por ejemplo, un año, un mes, un día). Por otra parte $1+r$ unidades del próximo periodo se convierten en $(1+r)^2$ en el siguiente periodo. La expresión general para una unidad que crece a una tasa constante r durante t periodos es:

$$(1+r)^t$$

Esta fórmula permite hacer, entre otros, los siguientes cálculos.

Número de años que se tarda en duplicar una variable a una tasa constante:

$$\begin{aligned}
&(1+r)^t = 2 \\
&t \ln(1+r) = \ln 2 \\
&t = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}
\end{aligned}$$

Tasa de crecimiento necesaria para duplicar una variable en t años:

$$\begin{aligned}
&(1+r)^t = 2 \\
&1+r = 2^{\frac{1}{t}} \\
&r = 2^{\frac{1}{t}} - 1
\end{aligned}$$

Variables en logaritmos y crecimiento

Un resultado que se usa en ocasiones es el siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Implicación práctica de este resultado

Si el límite de un cociente es uno cuando x tiende a cero, en términos prácticos, es posible aproximar el numerador por el denominador cuando x es pequeño. Es decir:

$$\ln(1+x) \approx x$$

Aplicación: diferencia de logaritmos como aproximación a una tasa de crecimiento

Se tiene una variable y observada en dos periodos:

$$y_1 = y_0 + y_1 - y_0 = y_0 + \Delta y$$

$$\frac{y_1}{y_0} = 1 + \frac{\Delta y}{y_0}$$

$$\ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta y}{y_0}\right)$$

$$\ln y_1 - \ln y_0 \approx \frac{\Delta y}{y_0}$$

Es decir, para tasas de crecimiento pequeñas, la tasa de crecimiento de una variable se puede aproximar por la diferencia entre los logaritmos neperianos de esa variable en dos periodos.

Demostración

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}\right)$$

Haciendo un cambio de variable $y = \frac{1}{x}$ se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to +\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$$

Por tanto, se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln e=1$$

Ventajas de una representación gráfica en logaritmos

La derivada de una variable con respecto al tiempo señala el crecimiento de esa variable de un periodo al siguiente. Este crecimiento es poco informativo ya que depende de las unidades en que está medida esa variable.

Derivada de una variable con respecto al tiempo:

$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}\approx\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Si se toman logaritmos neperianos, se tiene:

$$z=\ln y$$

$$\dot{z}=\frac{dz}{dt}\approx\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}}{y}\approx\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{y}$$

Es decir, la derivada de una variable en logaritmos representa la tasa de crecimiento. Por tanto, al observar la pendiente de una representación gráfica se obtiene información de la tasa de crecimiento.

Ejemplos

$x(t)$ es una variable que cambia con el tiempo *t*.

$\dot{x}(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ es la derivada con respecto al tiempo. Mide el cambio en la variable cuando el tiempo aumenta en una unidad. Es decir, cuando transcurre un periodo de tiempo.

Ejemplos:

$x(t)=3+2t \quad \dot{x}(t)=2 \quad \frac{\dot{x}}{x}=\frac{2}{3+2t}$

$$y(t)=3+2t-0{,}5t^2 \quad \dot{y}(t)=2-t \quad \frac{\dot{y}}{y}=\frac{2-t}{3+2t-0{,}5t^2}$$

$$z(t)=e^{0{,}01t} \quad \dot{z}(t)=0{,}01e^{0{,}01t} \quad \frac{\dot{z}}{z}=\frac{0{,}01e^{0{,}01t}}{e^{0{,}01t}}=0{,}01$$

Por tanto, los logaritmos neperianos ayudan a calcular tasas de crecimiento con más rapidez.

Función: $\ln z(t)=0{,}01t$

La derivada de la parte izquierda es la tasa de crecimiento: $\frac{\dot{z}}{z}$

Por tanto, la tasa de crecimiento es la derivada de la parte derecha: $0{,}01$

Tasa de Crecimiento de un cociente.

Renta Per Cápita: $y=\frac{Y}{L}$.

Cambio de la Renta Per Cápita:

$$\dot{y}=\frac{\dot{Y}L-\dot{L}Y}{L^2}$$

$$\dot{y}=\frac{\dot{Y}}{L}-\frac{\dot{L}}{L}\frac{Y}{L}=\frac{\dot{Y}}{Y}\frac{Y}{L}-\frac{\dot{L}}{L}\frac{Y}{L}=\frac{\dot{Y}}{Y}y-\frac{\dot{L}}{L}y$$

Tasa de Crecimiento de la Renta Per Cápita: $\frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{Y}}{Y}-\frac{\dot{L}}{L}$

Alternativamente:

$$\ln y=\ln Y-\ln L$$

$$\frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{Y}}{Y}-\frac{\dot{L}}{L}$$

Función del tiempo con tasa de crecimiento constante

y(t) es una función del tiempo.

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y}=r$$

Se trata de una ecuación diferencial que relaciona el valor de una variable con su cambio. Los pasos para resolverla serían los siguientes:

$$\frac{dy}{y} = rdt$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int rdt$$
$$\ln y = rt + \ln C$$
$$y = e^{rt+\ln C} = Ce^{rt}$$

donde, C es una constante de integración. El valor de dicha constante se puede determinar al hacer $t=0$. En este caso, se tiene que:

$$y_0 = Ce^{r0} = C$$

Por tanto, la expresión para una función del tiempo con una tasa de crecimiento constante es:

$$y = y_0 e^{rt}$$

Las personas observadoras notarán una aparente contradicción entre la primera y última formula presentadas. En la primera formula una unidad se convierte en $(1+r)^t$ al cabo de t años. Sin embargo, en la última fórmula una unidad ($y_0 = 1$) se convierte en e^{rt} al cabo de t años. La diferencia viene dada por el tipo de análisis que se hace en los dos casos. En el primer caso, se consideran unidades de tiempo discretas mientras en el segundo se hace un análisis continuo del tiempo. Es decir, los periodos son infinitamente pequeños. La transformación de una fórmula en la otra se puede hacer siguiendo los siguientes pasos.

En cursos elementales de matemáticas se estudia como cambiar las fórmulas de matemática financiera de años a meses y a días. Por ejemplo, si el tiempo t está medido en años y la capitalización se hace cada mes en vez de cada año la fórmula que se debe usar es:

$$\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}$$

Es decir, un año da lugar a doce acumulaciones pero el crecimiento en cada una de ellas es doce veces más pequeño. Si se quiere hacer en días se tiene la siguiente expresión:

$$\left(1+\frac{r}{360}\right)^{360t}$$

Si se quiere modelizar una capitalización en periodos muy cortos se tiene que calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^{xt}$$

Este límite contiene una indeterminación del tipo 1^{∞}. Se resuelve convirtiendo la expresión en una potencia del número *e*.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^{xt}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{r}}\right)^{\frac{x}{r}rt}=\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{r}}\right)^{\frac{x}{r}}\right)^{rt}=e^{rt}$$

Ecuaciones en diferencias finitas

Son ecuaciones de este tipo:

$$ay_t+by_{t-1}=c$$

donde, y_t representa una variable que cambia a lo largo del tiempo. La solución de esta ecuación es un conjunto de valores de y_t tales como $\{y_1,y_2,\ldots,y_t\}$.

Empezamos buscando la solución del caso particular en que $c=0$. En este caso, se dice que se trata de una ecuación en diferencias finitas hoomogénea:

$$ay_t+by_{t-1}=0$$

La ecuación se puede escribir como:

$$y_t=-\frac{b}{a}y_{t-1}$$

Cada término es el resultado de multiplicar el anterior por un número real. La solución general va a contener una potencia del tiempo de base $\left(-\frac{b}{a}\right)$.

En términos más generales se propone la siguiente solución:

$$y_t = AB^t$$

donde, A y B son números reales desconocidos. Sustituyendo esta solución en la ecuación se tiene que:

$$aAB^t + bAB^{t-1} = 0$$

El resultado de dividir por AB^{t-1} es:

$$aB + b = 0 \Rightarrow B = -\frac{b}{a}$$

Por tanto, la solución es:

$$y_t = A\left(-\frac{b}{a}\right)^t$$

El valor de A se puede determinar considerando el momento $t=0$. Es decir:

$$y_0 = A\left(-\frac{b}{a}\right)^0 \Rightarrow y_0 = A$$

La solución a la versión homogénea de la ecuación es:

$$y_t = y_0\left(-\frac{b}{a}\right)^t$$

La ecuación general tiene una solución de equilibrio (cuando y_t no cambia) bastante evidente:

$$ay + by = c \Rightarrow y = \frac{c}{a+b}$$

La solución general es una combinación entre esta solución y la que se había visto antes. Los resultados anteriores son:

$$\begin{aligned} ay_t + by_{t-1} &= 0 \\ ay + by &= c \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro tenemos que:

$$a\left(y_t + y\right) + b\left(y_{t-1} + y\right) = c$$

Es decir, la solución tiene la forma:

$$y_t^* = A\left(-\frac{b}{a}\right)^t + \frac{b}{a+b}$$

El valor de A puede ser averiguado usando el momento $t=0$.

$$y_0^* = A\left(-\frac{b}{a}\right)^0 + \frac{b}{a+b} = A + \frac{b}{a+b} \Rightarrow A = y_0^* - \frac{b}{a+b}$$

La solución tiene la forma:

$$y_t^* = \left(y_0^* - \frac{b}{a+b}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)^t + \frac{b}{a+b}$$

Ejemplo:

$$y_t - 0,8y_{t-1} = 1$$

La solución particular es:

$$y - 0,8y = 1 \Rightarrow 0,2y = 1 \Rightarrow y = 5$$

La ecuación homogénea es:

$$y_t - 0,8y_{t-1} = 0$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$A0,8^t$$

La solución de la ecuación general es:

$$y_t = 5 + A0,8^t$$

Usando el momento t=0 se tiene que:

$$y_0 = 5 + A \Rightarrow A = y_0 - 5$$

Por tanto:

$$y_t = 5 + (y_0 - 5)0,8^t$$

A medida que pasa el tiempo el segundo sumando pierde importancia e y_t tiene hacia su valor de equilibrio (cuando no cambia en el tiempo) que es 5.