

## Crecimiento Económico (Tercera parte)

Revisado en noviembre de 2023.

### Contabilidad de Crecimiento

*Residuo de Solow.*

Con una *Función de Producción Cobb-Douglas*:  $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ .

Fijamos los *Factores de Producción* en  $K = L = 2$ . En ese caso, el cambio en la producción ( $Y$ ) depende de los cambios en la tecnología  $A$ . Si consideramos tres periodos de tiempo, se tiene que:

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

$$K = L = 2 \Rightarrow Y = A2^\alpha 2^{1-\alpha} = 2A$$

$$A_0 = 1 \Rightarrow Y_0 = 2$$

$$A_1 = 1,1 \Rightarrow Y_1 = 2,2$$

$$A_2 = 1,5 \Rightarrow Y_2 = 3,3$$

Es frecuente interpretar  $A$  como un índice de *Productividad Total de los Factores* y la tasa de crecimiento de  $A$ , es decir,  $\frac{\dot{A}}{A}$  como una Tasa de Crecimiento de la *Productividad Total de los Factores*.

*Productividad Total de los Factores y Productividad Media.*

*Productividad Media  $\equiv$  Producto Medio del Trabajo.*

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{Y}{L} = \frac{AK^\alpha L^{1-\alpha}}{L^\alpha L^{1-\alpha}} = A \left( \frac{K}{L} \right)^\alpha$$

Una *Productividad Total de los Factores* ( $A$ ) más elevada conduce a una *Productividad Media* más elevada si el *Capital per Cápita* se mantiene constante.

La *Productividad Media* puede variar de forma distinta a la *Productividad Total de los Factores* si el *Capital per Cápita* cambia.

$A$  es inobservable.

Solow propone un estimador para  $\frac{\dot{A}}{A}$ .

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha} \Rightarrow \ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha) \ln L$$

Derivando la expresión en logaritmos con respecto al tiempo, se tiene que:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha \ln \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha) \frac{\dot{L}}{L}.$$

Es decir, el crecimiento de la producción se puede descomponer en una parte que no depende del cambio en los factores de producción  $\frac{\dot{A}}{A}$  y en otra que sí

depende de los factores de producción  $\left( \alpha \ln \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha) \frac{\dot{L}}{L} \right)$ .

La parte del cambio en el crecimiento del output que no depende de los factores de producción *se puede* calcular como:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha \ln \frac{\dot{K}}{K} - (1-\alpha) \frac{\dot{L}}{L}.$$

El valor estimado de  $\frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha \ln \frac{\dot{K}}{K} - (1-\alpha) \frac{\dot{L}}{L}$  se conoce como *Residuo de Solow*.

Se usa como una medida empírica del crecimiento de la *Productividad Total de los Factores*.

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$$

$$K r = \alpha A K^{\alpha} L^{1-\alpha} = \alpha Y$$

$$\frac{K r}{Y} = \alpha$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha \frac{\dot{K}}{K} - (1-\alpha) \frac{\dot{L}}{L}$$

**Con una Función de Producción Genérica:**

$$Y = F(A, K, L)$$

$$\dot{Y} = \frac{\partial F}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial F}{\partial K} \dot{K} + \frac{\partial F}{\partial L} \dot{L}$$

$$\dot{Y} = A \frac{\partial F}{\partial A} \frac{\dot{A}}{A} + K \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\dot{K}}{K} + L \frac{\partial F}{\partial L} \frac{\dot{L}}{L}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \underbrace{\frac{A \frac{\partial F}{\partial A} \dot{A}}{Y}}_{\text{TFP}} + \frac{K \frac{\partial F}{\partial K} \dot{K}}{Y} + \frac{L \frac{\partial F}{\partial L} \dot{L}}{Y}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \text{TFP} + s_k \frac{\dot{K}}{K} + s_l \frac{\dot{L}}{L}$$

$$s_k = \frac{r K}{Y} = \frac{\partial F}{\partial K} \frac{K}{Y}$$

$$s_l = \frac{w L}{Y} = \frac{\partial F}{\partial L} \frac{L}{Y}$$

$$\text{TFP} = \frac{\dot{Y}}{Y} - s_k \frac{\dot{K}}{K} - s_l \frac{\dot{L}}{L}$$

## Modelos con crecimiento constante en el estado estacionario.

### Capital humano

$$Y = AK$$

$$\rightarrow$$

$$Y = AK^\alpha H^{1-\alpha}$$

[H capital humano]

$sY \rightarrow i$  inversión en capital fijo  
 $sY \rightarrow h$  invertir en capital humano  
 $sY \rightarrow I$   
 $sY \rightarrow H$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} H^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial H} = (1-\alpha) K^\alpha H^{-\alpha}$$

$$\alpha K^{\alpha-1} H^{1-\alpha} = (1-\alpha) K^\alpha H^{-\alpha}$$

$$\frac{H^{1-\alpha}}{H^{-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{K}{K^{\alpha-1}}$$

$$H = \frac{1-\alpha}{\alpha} K$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} > \frac{\partial Y}{\partial H}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} < \frac{\partial Y}{\partial H}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial Y}{\partial H}$$

$$Y = AK$$

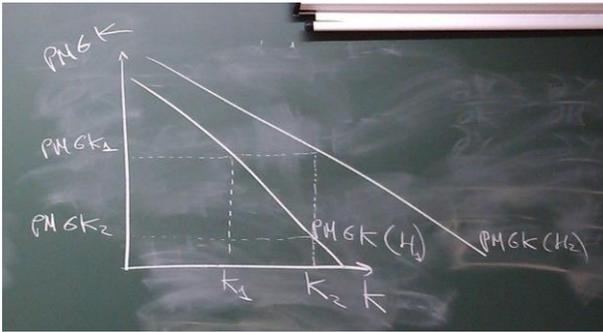
$$\rightarrow$$

$$Y = AK^\alpha H^{1-\alpha}$$

$$Y = AK^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^\alpha K^{\alpha(1-\alpha)}$$

$$Y = A \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha} K$$

$$Y = A^* K$$



Inversión pública óptima.

un modelo con sector público

$$Y = AK^\alpha G^{1-\alpha}$$

$$\frac{Y}{Z} = A \frac{K^\alpha}{Z} \frac{G^{1-\alpha}}{Z^{1-\alpha}} = A \frac{K^\alpha}{Z^\alpha} \frac{G^{1-\alpha}}{Z^{1-\alpha}}$$

$$y = A k^\alpha g^{1-\alpha}$$

$$g = T y$$

$$y = A k^\alpha (T y)^{1-\alpha}$$

$$y = A k^\alpha T^{1-\alpha} y^{1-\alpha}$$

$$y^\alpha = A k^\alpha T^{1-\alpha}$$

$$y = A T^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} k$$

un modelo con sector público

$$\dot{k} = s y(r) - (n + \delta) k \quad \text{general}$$

$$\dot{k} = s A T y - (n + \delta) k$$

$$\dot{k} = s (1 - T) A \frac{1}{T} k - (n + \delta) k$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = s (1 - T) A \frac{1}{T} - (n + \delta)$$

estado estacionario

$$0 = s (1 - T) A \frac{1}{T} - (n + \delta)$$

