Crecimiento Económico (Segunda parte)

Revisado en noviembre de *2023*.

Análisis del estado estacionario

Análisis en el modelo desarrollado hasta ahora.

Función de Producción Cobb-Douglas. Rendimientos Constantes a Escala.

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n+\delta)k$$

$$\dot{k} = 0 \Rightarrow sAk^{\alpha} - (n+\delta)k = 0 \Rightarrow$$

$$sAk^{\alpha} = (n+\delta)k \Rightarrow \frac{sA}{n+\delta} = k^{1-\alpha} \Rightarrow$$

$$k^{*} = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

El stock de capital en el *Estado Estacionario* está relacionado positivamente con la tasa de ahorro (*s*) y con el nivel tecnológico (*A*). Está relacionado de forma inversa con la tasa de crecimiento poblacional (*n*).

El nivel de producción (renta) per cápita en el *Estado Estacionario* se puede calcular como:

$$y^{*} = Ak^{*\alpha}$$

$$y^{*} = A\left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$y^{*} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

De nuevo, la tasa de ahorro (*s*) está relacionada positivamente con el nivel de producción (renta) per cápita en el *Estado Estacionario*.

El consumo en el *Estado Estacionario* se puede calcular como:

$$c^* = (1-s)\, y^*$$

$$c^* = (1-s)\, A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{n+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

El efecto de la tasa de ahorro en el consumo en el *Estado Estacionario* es incierto. Un mayor ahorro da lugar a una mayor renta pero se consume una proporción menor de esa mayor renta.

Análisis general de Estado Estacionario.

El *Estado Estacionario* se caracteriza por tasas de crecimiento constante.

Modelo de Solow:

$$\frac{\dot{k}}{k} = sAk^{-(1-\alpha)} - (n+\delta)$$

Estado Estacionario.

Se caracteriza por una *Tasa de Crecimiento Constante*.

$$\gamma = \frac{\dot{k}}{k}.$$

Por tanto:

$$\gamma = sAk^{-(1-\alpha)} - (n+\delta)$$

Agrupando términos constantes:

$$\frac{\gamma + n + \delta}{sA} = k^{-(1-\alpha)} \Rightarrow k^{(1-\alpha)} = \frac{sA}{\gamma + n + \delta}$$

Analizando las tasas de crecimiento. Se toman logaritmos y derivadas a ambos lados de la ecuación.

$$\ln k^{(1-\alpha)} = \ln \frac{sA}{\gamma + n + \delta} \Rightarrow (1-\alpha)\ln k = \ln \frac{sA}{\gamma + n + \delta}$$
$$(1-\alpha)\frac{\dot{k}}{k} = 0$$
$$(1-\alpha)\gamma = 0$$

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \gamma \in \mathbb{R}$$

¿Qué significa $\alpha = 1$?

Matemáticamente:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \Rightarrow Y = AK^{1}L^{0} \Leftrightarrow Y = AK$$
$$y = Ak$$

Intuición económica.

L no es relevante. El *Capital Humano* es relevante.

Modelo de Solow con *Función de Producción AK*

Función de Producción Cobb-Douglas.

$$Y = AK$$
$$\frac{Y}{L} = A\frac{K}{L}$$
$$y = Ak$$

Modelo de Solow.

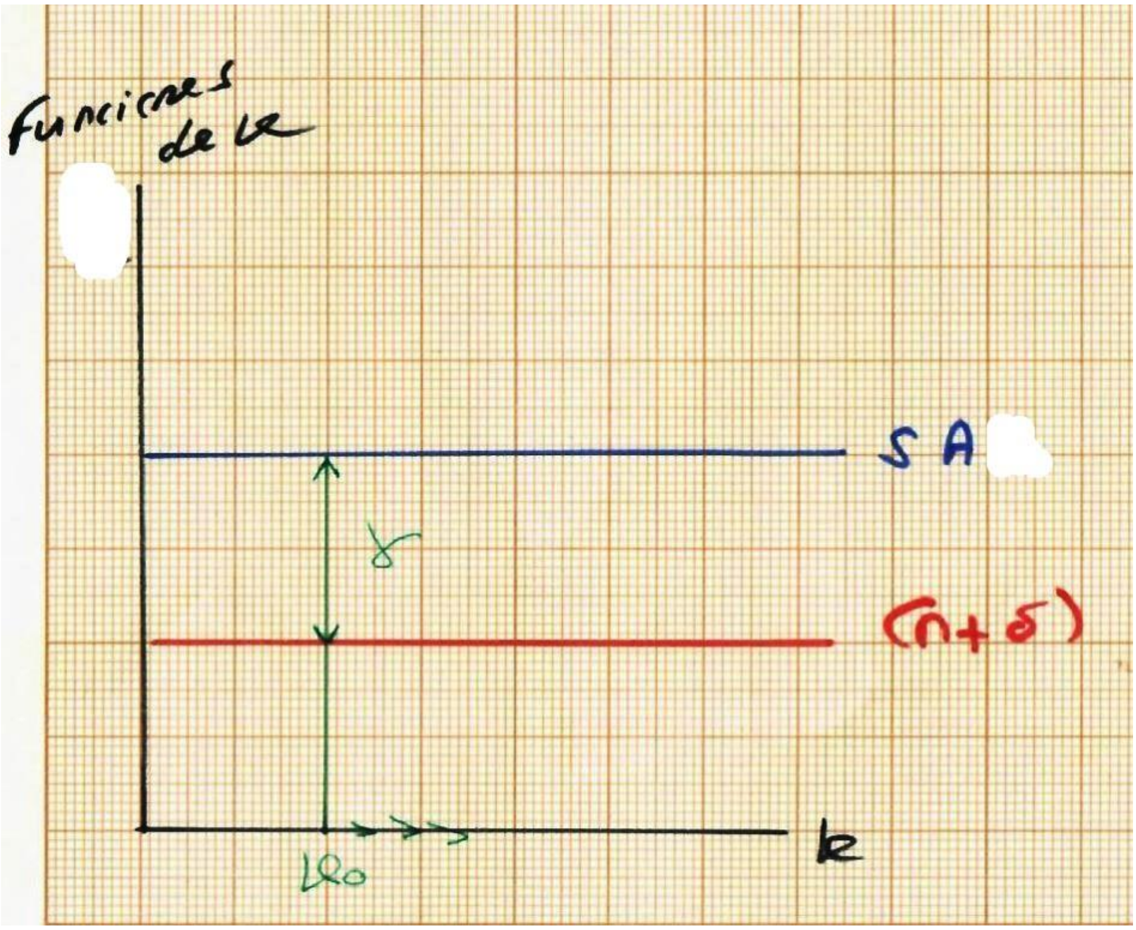
$$\dot{k} = sAk - (n+\delta)k$$
$$\frac{\dot{k}}{k} = sA - (n+\delta)$$

La tasa de crecimiento del capital per cápita es constante.

$\gamma = sA - (n+\delta)$.

$sA > (n+\delta) \Rightarrow \gamma > 0$
$sA < (n+\delta) \Rightarrow \gamma < 0$

Representación gráfica.



La tasa de crecimiento de la renta per cápita en el *Estado Estacionario* es:

$$y = Ak$$
$$\ln y = \ln A + \ln k$$
$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{k}}{k}$$
$$\frac{\dot{y}}{y} = 0 + \gamma = \gamma$$

Modelo de Solow. Efectos en el *Estado Estacionario* de una tasa constante de cambio técnico

Se analiza el efecto en el *Estado Estacionario* de una tasa de *Cambio Técnico* constante.

$$\frac{\dot{A}}{A} = x > 0 \Leftrightarrow A(t) = A(0)e^{xt}$$

Modelo de Solow.

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n+\delta)k$$

Tasa de Crecimiento del Capital per Cápita.

$$\frac{\dot{k}}{k} = sAk^{-(1-\alpha)} - (n+\delta)$$

Estado Estacionario.

Se caracteriza por una *Tasa de Crecimiento Constante* del Capital per Cápita.

$$\gamma = \frac{\dot{k}}{k}.$$

Por tanto:

$$\gamma = sAk^{-(1-\alpha)} - (n+\delta)$$

Agrupando términos constantes:

$$\frac{\gamma+n+\delta}{s}=Ak^{-(1-\alpha)}$$

Analizando las tasas de crecimiento. Se toman logaritmos y derivadas a ambos lados de la ecuación.

$$\ln\frac{sA}{\gamma+n+\delta}=\ln A-(1-\alpha)\ln k$$

$$0=\frac{\dot{A}}{A}-(1-\alpha)\frac{\dot{k}}{k}$$

$$0=x-(1-\alpha)\gamma$$

$$\gamma=\frac{x}{1-\alpha}$$

Se calcula la tasa de crecimiento del output (renta) per cápita en el *Estado Estacionario*.

$$y=Ak^{\alpha}$$

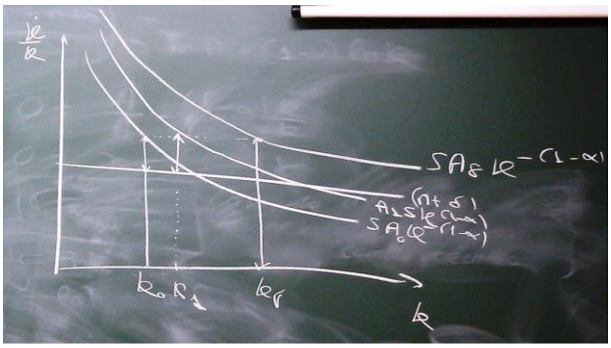
$$\ln y=\ln A+\alpha\ln k$$

$$\frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{A}}{A}+\alpha\frac{\dot{k}}{k}$$

$$\frac{\dot{y}}{y}=x+\alpha\gamma$$

$$\frac{\dot{y}}{y}=x+\alpha\frac{x}{1-\alpha}=\frac{x}{1-\alpha}$$

Representación Gráfica



La *Regla de Oro*.

“Amarás al prójimo como a ti mismo”

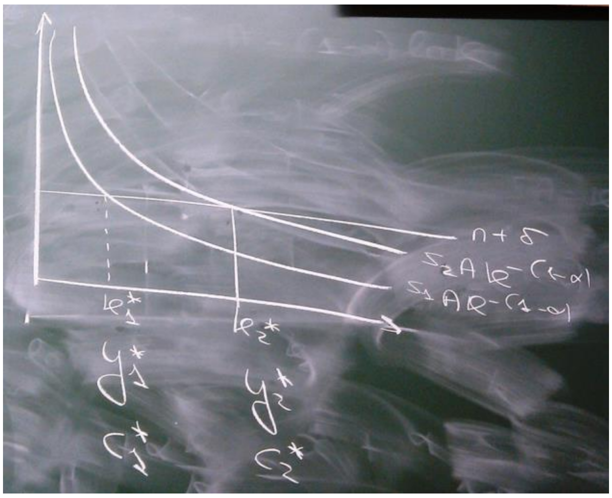
En concreto, buscarás la mejor situación para aquellas personas que puedan disfrutar del *Estado Estacionario*. Por tanto, elegirás aquella *Tasa de Ahorro* que les permita el máximo consumo en el *Estado Estacionario*.

Conceptos.

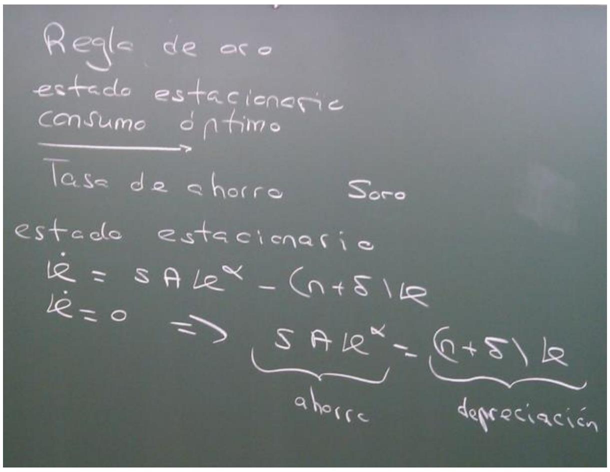
Estado Estacionario de la *Regla de Oro*.

Tasa de Ahorro que conduce al *Estado Estacionario* de la *Regla de Oro*.

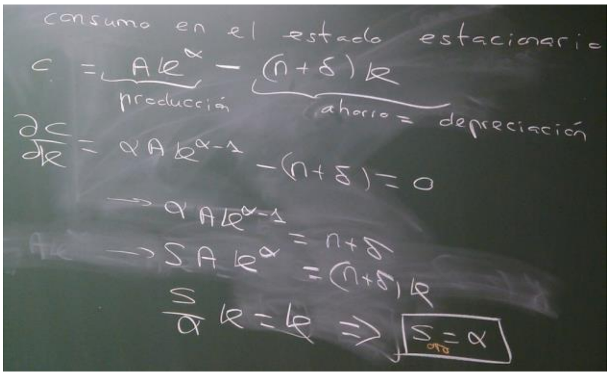
Representación gráfica de los efectos del ahorro en el *Estado Estacionario*.

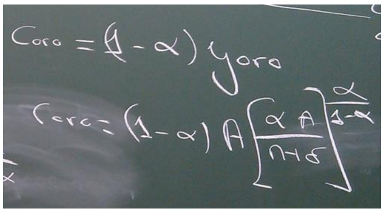


Una *Tasa de Ahorro* más elevada ($s_2 > s_1$) conduce a un *Estado Estacionario* donde el capital per cápita es más elevado $\left(k_2^* > k_1^*\right)$, la renta per cápita es más elevada $\left(y_2^* > y_1^*\right)$ pero el efecto en el consumo per cápita es indeterminado. Se debe a que se consume con más renta per cápita, pero se ahorra una proporción más alta de esa renta.

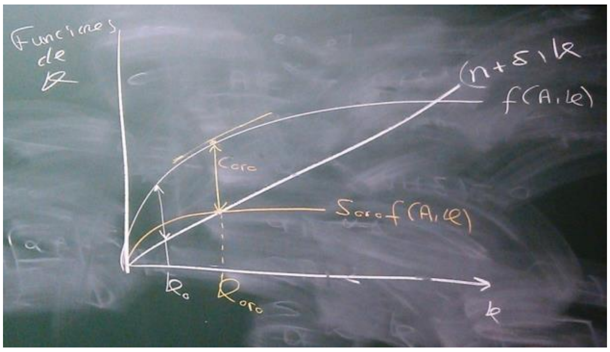


El *Estado Estacionario* se caracteriza porque el ahorro es igual a la depreciación. Por ese motivo, no queda ahorro disponible para incrementar el capital per cápita.





Representación gráfica del *Estado Estacionario* de la *Regla de Oro*.


Funciones de k
(n+δ)k
f(A,k)
c_{oro}
$s_{oro} f(A,k)$
k_0
k_{oro}
k