Unas notas sobre el Modelo de Solow-Swan.

Revisado en octubre de *2023*.

Un resumen muy personal.

El crecimiento requiere *Inversión*. Sin embargo, la *Inversión* no causa el crecimiento. Es necesario explicar por qué se invierte.

Un niño necesita comida para crecer. Pero el proceso de crecimiento tiene unas bases biológicas que no se alteran sustancialmente comiendo más. Por ejemplo, no se puede pretender jugar al baloncesto profesional a base de comer mucho si tus padres y tus abuelos miden *1,50*.

Se sigue el Capítulo *1* de *Apuntes de Crecimiento Económico* de Sala i Martín.

El modelo de *Solow* considera una economía **cerrada** y **sin sector público**.

Modelo del Flujo Circular de la Renta en una economía **cerrada** y **sin sector público**.

Producción ≡ Renta.

La producción remunera a los factores que intervienen.

Renta ≡ Gasto.

La renta se gasta en la producción.

Gasto ≡ Producción.

El gasto consiste en usar los bienes que se producen.

Identidad Macroeconómica Fundamental.

Producción ≡ Renta ≡ Gasto.

Producción.

La *Producción* se refiere a un único producto a un agregado.

La *Producción* es función de dos *Factores Rivales*: *Capital* (*K*) y *Trabajo* (*L*) y de un *Factor no Rival*: la *Tecnología* (*A*). Se representa por la Función de Producción: $F(A, K, L)$

Factores Rivales. El uso en una actividad implica la imposibilidad de ser usado en otra actividad al mismo tiempo. Una parcela de tierra que se usa como campo de fútbol no puede ser usada como huerta.

Factores No Rivales. El uso en una actividad no impide el uso en otra al mismo tiempo. Las reglas de la aritmética son un factor de producción. El nivel de producción sería más bajo sin estas reglas. Se pueden usar al mismo tiempo en diversas actividades.

Propiedades de la Función de Producción.

Producto Marginal Positivo de los factores de producción.

$$\frac{\partial F(A,K,L)}{\partial K} > 0 \quad \frac{\partial F(A,K,L)}{\partial L} > 0 .$$

Producto Marginal Decreciente de los factores de producción.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)}{\partial K} = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)}{\partial L} = \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$$

El proceso productivo presenta *Rendimientos Constantes a Escala*. Desde un punto de vista matemático, esta propiedad implica que la *Función de Producción* es homogénea de grado *1* en los *Factores Rivales*.

$$F(A,\lambda K,\lambda L)=\lambda F(A,K,L)$$

Una implicación importante.

$$\lambda=\frac{1}{L}$$
$$F\left(A,\frac{1}{L}K,\frac{1}{L}L\right)=\frac{1}{L}F(A,K,L)$$
$$F\left(A,\frac{K}{L},1\right)=\frac{F(A,K,L)}{L}$$

El objeto en el lado izquierdo es la *Producción per Cápita*. El lado derecho representa la producción de un trabajador que disponga del *Capital per Cápita* de la economía.

Una cuestión de notación.

Hemos llegado a que:

$$\frac{Y}{L}=F\left(A,\frac{K}{L},1\right)$$

Usando la notación de letra minúscula para los valores per cápita se tiene que:

$$y=F(A,k,1)$$

La función a la derecha es la función de producción per cápita. Siguiendo con la convención de usar letras minúsculas para los valores per cápita, se escribe:

$$F(A,k,1)=f(A,k)$$

Ejemplos de Funciones de Producción:

$$F(A,K)=A\sqrt{K} \qquad F(1,K)=\sqrt{K} \qquad F(2,K)=2\sqrt{K}$$
$$F(A,K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta} \qquad F(A,K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad F(1,K,L)=K^{0,4}L^{0,7}$$
$$F(1,K,L)=K^{0,4}L^{0,5} \qquad F(1,K,L)=K^{0,5}L^{0,5} \qquad F(2,K,L)=2K^{0,5}L^{0,5}$$

Funciones de Producción per cápita:

$$Y=F(A,K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$
$$\frac{Y}{L}=\frac{F(A,K,L)}{L}=\frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L}=\frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L^{\alpha}L^{1-\alpha}}=\frac{AK^{\alpha}}{L^{\alpha}}=A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$
$$y=Ak^{\alpha}$$

$$Y=F(1,K,L)=K^{0,5}L^{0,5}$$
$$\frac{Y}{L}=\frac{F(1,K,L)}{L}=\frac{K^{0,5}L^{0,5}}{L}=\frac{K^{0,5}L^{0,5}}{L^{0,5}L^{0,5}}=\frac{K^{0,5}}{L^{0,5}}=\left(\frac{K}{L}\right)^{0,5}$$
$$y=k^{0,5}$$

Renta.

Remuneración de los *Factores Productivos*.

Destinos de la *Renta* (*Y*) en una economía **sin** Sector Público.

i. El *Consumo* (*C*) destinado a producir bienestar presente.

ii. El Ahorro (*S*) destinado a producir bienestar en el futuro.

$Y=C+S$.

Supuesto simplificador.

Se destina al consumo (*C*) una proporción (*1- s*) de la *Renta* (*Y*).

$C=(1-s)Y$.

(1− s) se denomina *Propensión Marginal al Consumo*. Es decir, la proporción de la *Renta* (*Y*) destinada al *Consumo*.

El *Ahorro* se puede calcular como:

$$S = Y - C = Y - (1 - s)Y$$
$$S = sY$$

Donde *s* es la *Propensión Marginal al Ahorro*. Es decir, la proporción de la *Renta* (*Y*) destinada al *Ahorro*.

Implicaciones de la Identidad Macroeconómica.

Renta ≡ Producción.

$$Y = F(A, K, L).$$

Renta ≡ Gasto.

$$Y \equiv DA.$$

Producción ≡ Gasto.

$$F(A, K, L) = DA.$$

Salario, rendimiento por unidad de capital, masa salarial, remuneración del capital.

En equilibrio el salario (*w*) se iguala con el *Producto Marginal del Trabajo* y el rendimiento unitario del capital (*r*) con el *Producto Marginal del Capital.*

$$r = \frac{\partial F(A, K, L)}{\partial K} \quad w = \frac{\partial F(A, K, L)}{\partial L}$$

La remuneración total del trabajo y la remuneración total del capital se pueden escribir como:

$$rK = \frac{\partial F(A, K, L)}{\partial K} K \quad wL = \frac{\partial F(A, K, L)}{\partial L} L$$

La participación de la remuneración del trabajo en el producto total (S_L) y la participación de la remuneración del capital en el producto total (S_K) se pueden escribir como:

$$S_K = \frac{rK}{Y} = \frac{\frac{\partial F(A,K,L)}{\partial K}K}{Y} \quad S_L = \frac{wL}{Y} = \frac{\frac{\partial F(A,K,L)}{\partial L}L}{Y}$$

En el caso de una Función de Producción Cobb-Douglas se tiene que:

$$F(A,K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

$$r = \frac{\partial F(A,K,L)}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \quad w = \frac{\partial F(A,K,L)}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}$$

Usando este resultado, la remuneración del Capital y del Trabajo es:

$$rK = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}K \quad wL = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}L$$
$$rK = \alpha AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \quad wL = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$
$$rK = \alpha Y \quad wL = (1-\alpha)Y$$

La participación de la remuneración del trabajo en el producto total (S_L) y la participación de la remuneración del capital en el producto total (S_K) se pueden escribir como:

$$\frac{rK}{Y} = \alpha \quad \frac{wL}{Y} = 1-\alpha .$$

En una Función de Producción Cobb-Douglas las participaciones de la remuneración del capital y del trabajo en el producto coinciden con los exponentes de los factores de producción en la función de producción.

Gasto.

La *Demanda Agregada* (*DA*) en una economía **cerrada** y **sin sector público** es igual a la suma del *Consumo* (*C*) y la *Inversión* (*I*).

$DA = C + I$.

Una parte del gasto se destina a satisfacer las necesidades de los hogares. Es el Consumo (C). Se había supuesto que $C = (1-s)Y$.

La inversión (*I*) es la parte de la producción compuesta de bienes que permiten la producción futura.

La *Inversión* (*I*) va destinada a cubrir la *Depreciación* (*D*) y a incrementar el stock de *Capital* $\dot{K} = \frac{dK}{dt}$.

$I = \dot{K} + D$.

Algunas ideas interesantes:

$$I = D \Rightarrow \dot{K} = 0$$
$$I > D \Rightarrow \dot{K} > 0$$
$$I < D \Rightarrow \dot{K} < 0$$
$$I = 0 \Rightarrow \dot{K} = -D$$

La primera línea significa que la *Inversión* tiene que ser igual a la *Depreciación* para que se mantengan el *Stock de Capital*. Si la *Inversión* es mayor que la *Depreciación* hay un incremento del Stock de Capital y viceversa.

Por último, si no hay *Inversión*, el *Stock de Capital* se reduce en la cuantía de la *Depreciación*.

$\dot{K} = \frac{dK}{dt}$ es la parte de la inversión destinada a incrementar el Stock de Capital. Se le conoce como *Inversión Neta*.

D es la parte de la *Inversión* destinada a cubrir la *Depreciación*. Es decir, el desgaste del *Stock de Capital*. Se supone que:

$D = \delta K$.

Es decir, que la *Depreciación* supone una proporción δ del Stock de Capital (*K*).

Se tiene finalmente que:

$$I = \dot{K} + \delta K$$

Las ideas anteriores se conectan usando las *Identidades Macroeconómicas Fundamentales* para crear la ***Ecuación Fundamental*** del *Modelo de Solow*.

Renta ≡ Gasto.

$Y \equiv DA$.

$$\begin{aligned}
&Y = DA \\
&DA = C + I \\
&DA = (1 - s)Y + I \\
&Y = (1 - s)Y + I \\
&sY = I
\end{aligned}$$

Renta ≡ Producción.

$Y = F(A, K, L)$.

$$\begin{aligned}
&sF(A, K, L) = I \\
&sF(A, K, L) = \dot{K} + \delta K \\
&\dot{K} = sF(A, K, L) - \delta K
\end{aligned}$$

Esta ecuación constituye el núcleo del *Modelo de Solow*. Esta ecuación tiene una descripción de la dinámica del stock de capital.

Modelo de Solow en términos per cápita.

Las variables per cápita se representan por la letra minúscula correspondiente. En concreto, el *Capital per Cápita* $k=\frac{K}{L}$ y la Renta per Cápita $y=\frac{Y}{L}$. En ambos casos, la variable absoluta se divide por la variable L que representa el trabajo.

El trabajo (L) se considera una *variable exógena* que crece a una tasa de crecimiento constante y exógena n. Por tanto, $\frac{\dot{L}}{L}=n$ y $L=L_0e^{nt}$.

A continuación, se desarrolla la ecuación que describe la dinámica del *Capital per Cápita*. Es decir, $\dot{k}=\frac{dk}{dt}$. Derivando con respecto al tiempo en la expresión $k=\frac{K}{L}$, se tiene que:

$$\dot{k}=\frac{\dot{K}L-\dot{L}K}{L^2}=\frac{\dot{K}}{L}-\frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{L}=\frac{\dot{K}}{L}-\frac{\dot{L}}{L}k$$

$$\dot{k}=\frac{\dot{K}}{L}-nk$$

Intuiciones de este resultado.

$$\dot{k}=\frac{\dot{K}}{L}-nk$$

$$\dot{K}=0\Rightarrow\dot{k}=-nk\Rightarrow\frac{\dot{k}}{k}=-n$$

$$\dot{k}=0\Rightarrow\frac{\dot{K}}{L}-n\frac{K}{L}=0\Rightarrow\frac{\dot{K}}{K}=n$$

$$\dot{k}>0\Rightarrow\frac{\dot{K}}{L}-n\frac{K}{L}>0\Rightarrow\frac{\dot{K}}{K}>n$$

En ausencia de inversión neta ($\dot{K}=0$), el crecimiento poblacional reduce el capital per cápita en la misma tasa a la que crece la población.

Dos ecuaciones a considerar:

$$\dot{K} = sF(A,K,L) - \delta K$$
$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$$

Dividiendo la primera de ellas por L se tiene que:

$$\dot{K} = sF(A,K,L) - \delta K$$

$$\frac{\dot{K}}{L} = s\frac{F(A,K,L)}{L} - \delta\frac{K}{L}$$

Usando la notación per cápita se tiene que:

$$\frac{\dot{K}}{L} = sf(A,k) - \delta k$$

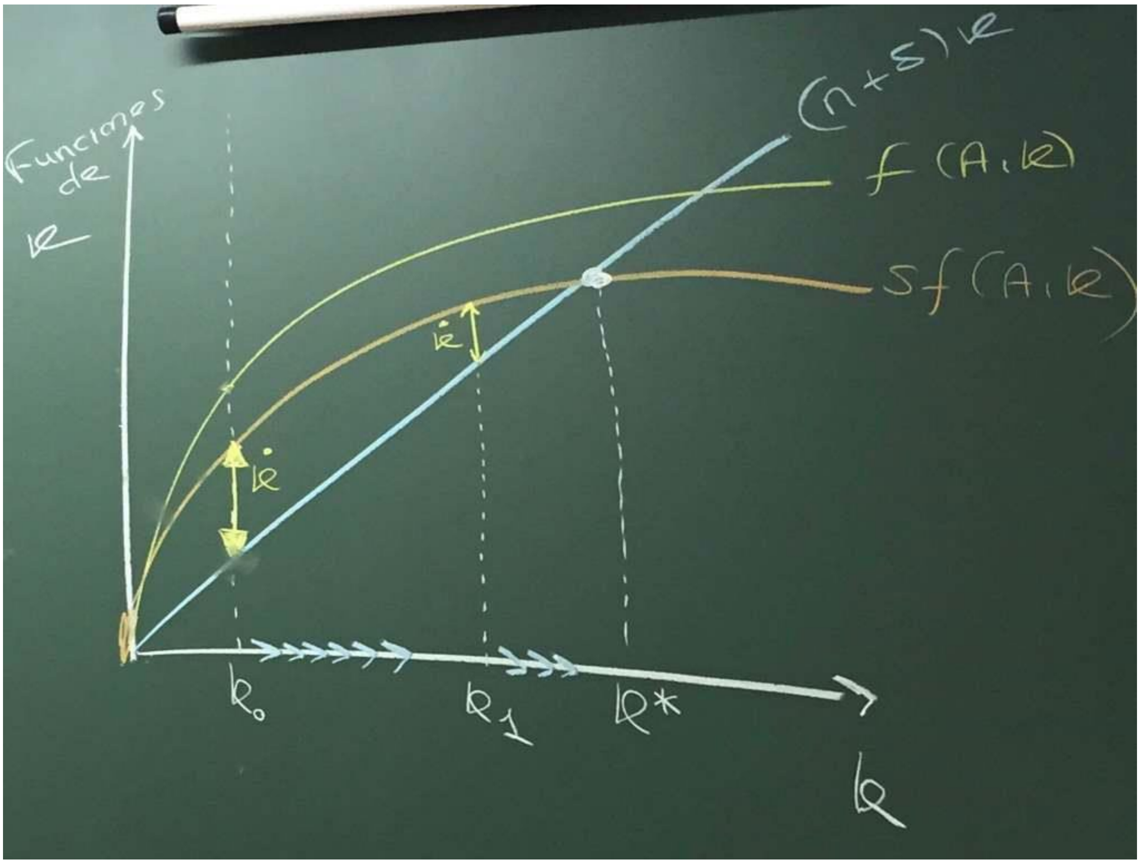
$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$$

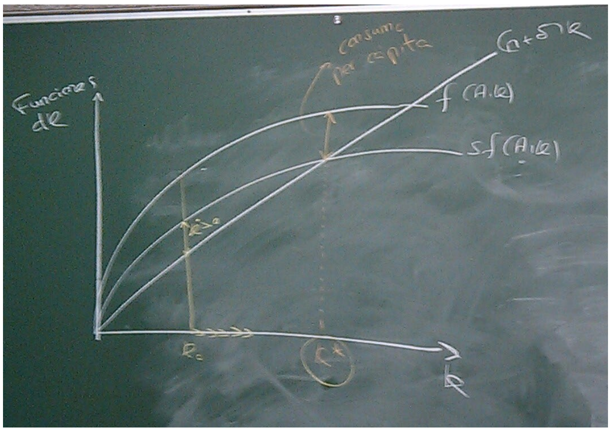
$$\dot{k} = sf(A,k) - (n+\delta)k$$

Esta es la ecuación que define el *Modelo de Solow*.

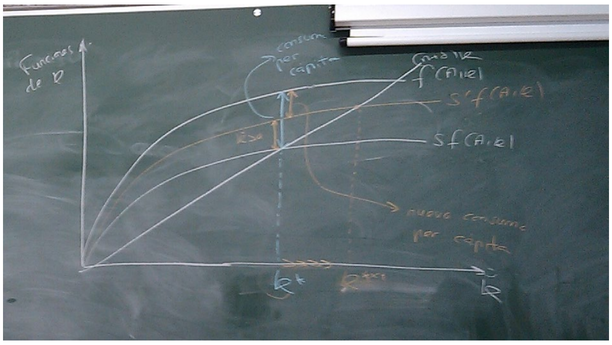
Efectos de los cambios en los parámetros del modelo de Solow

<u>Representación gráfica del modelo de Solow en términos per cápita</u>.





<u>Representación gráfica del incremento de la tasa de ahorro de *s* a *s'* (*s'*>*s*)</u>



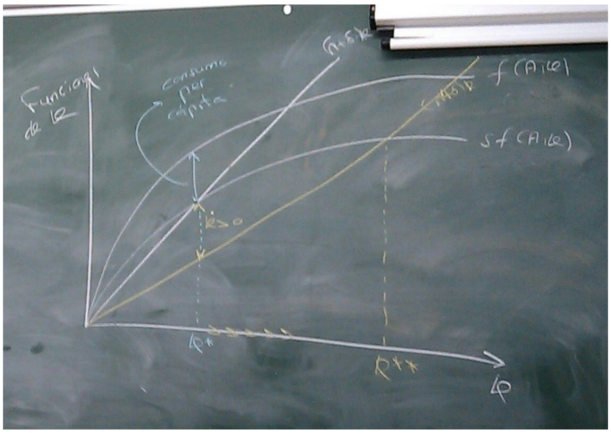
La función de producción per cápita y la recta que representa la depreciación no cambian.

La curva de ahorro se desplaza hacia arriba.

En el estado estacionario original (k^*):

1. Disminuye el consumo per cápita
2. Aumenta en la misma cantidad el cambio del capital per cápita por unidad de tiempo.
3. La economía crece a una tasa cada vez más baja hasta llegar al nuevo estado estacionario (k^{**}).

<u>Representación gráfica de una reducción de la tasa de crecimiento poblacional de n a n' ($n'>n$)</u>



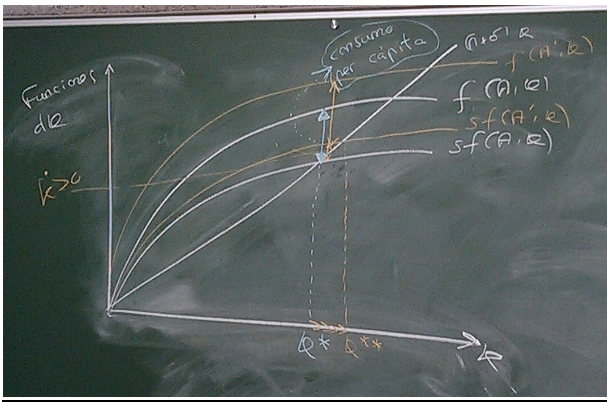
La función de producción y de ahorro no cambian. La recta de depreciación gira en el sentido de las agujas del reloj.

En el estado estacionario original (k^*):

El consumo per cápita no cambia.

El cambio temporal del capital per cápita se hace positivo. Eso permite a la economía crecer a una tasa cada vez más baja hasta llegar al nuevo estado estacionario (k^{**}).

<u>*Representación gráfica del cambio técnico de A a A' (A'>A)*</u>



Se desplaza la función de producción y la función de ahorro. En el estado estacionario original (k^*):

Se incrementa el consumo per cápita.

Se hace positivo el cambio en el stock de capital per cápita.

La economía crece a una tasa cada vez más baja hasta llegar al nuevo estado estacionario (k^{**}).

Relación entre el crecimiento del stock de capital per cápita, el crecimiento del producto (renta) per cápita y el crecimiento del consumo per cápita.

$$y = f(A,k)$$
$$\dot{y} = f'(A,k)\dot{k}$$
$$\dot{c} = (1-s)\dot{y}$$
$$\dot{k} > 0 \Rightarrow \dot{y} > 0 \Rightarrow \dot{c} > 0$$

Análisis de la Tasa de Crecimiento Económico.

Modelo de Solow en términos per cápita.

$$\dot{k} = sf(A,k) - (n+\delta)k$$

Se hace el análisis con una *Función de Producción* per cápita *Cobb-Douglas*.

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$
$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L^{\alpha}L^{1-\alpha}} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$
$$y = Ak^{\alpha}$$

Modelo de Solow con *Función de Producción Cobb-Douglas*.

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n+\delta)k$$

Tasa de Crecimiento del Capital per cápita.

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sAk^{\alpha}}{k} - \frac{(n+\delta)k}{k}$$
$$\frac{\dot{k}}{k} = sAk^{\alpha-1} - (n+\delta)$$

Presentaciones alternativas:

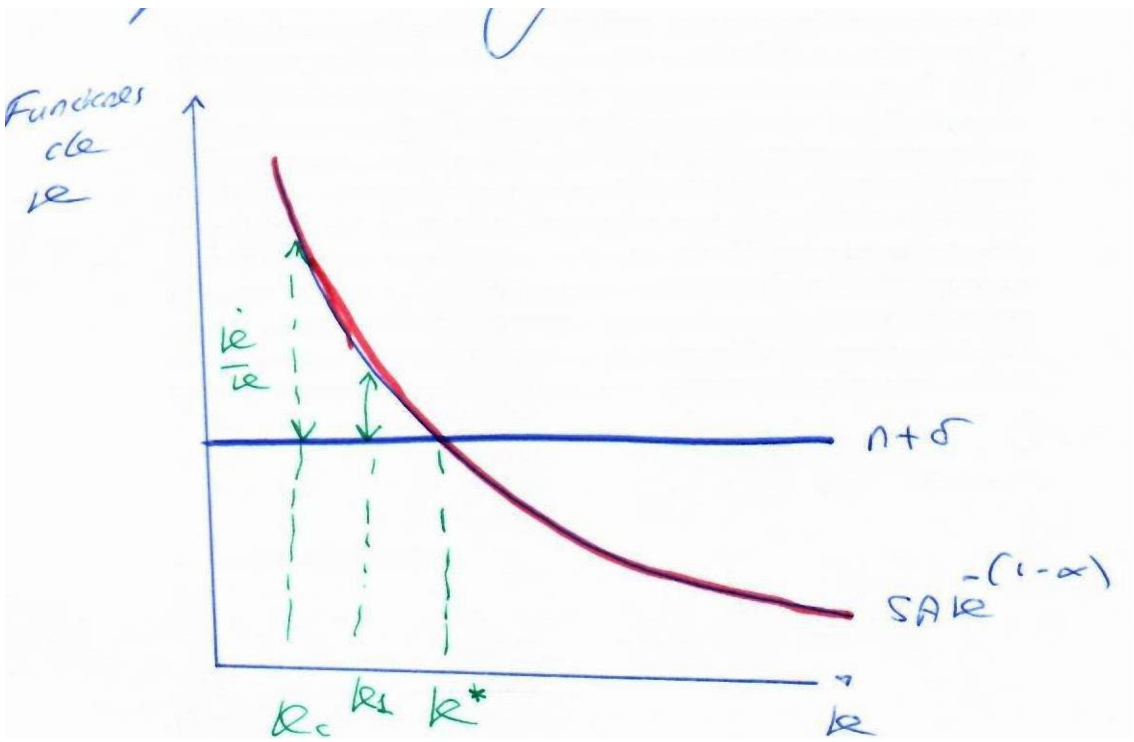
$$\frac{\dot{k}}{k} = sAk^{-(1-\alpha)} - (n+\delta)$$
$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sA}{k^{(1-\alpha)}} - (n+\delta)$$

$\alpha > 0$: Esta condición es necesaria para que el *Producto Marginal del Capital* sea positivo.

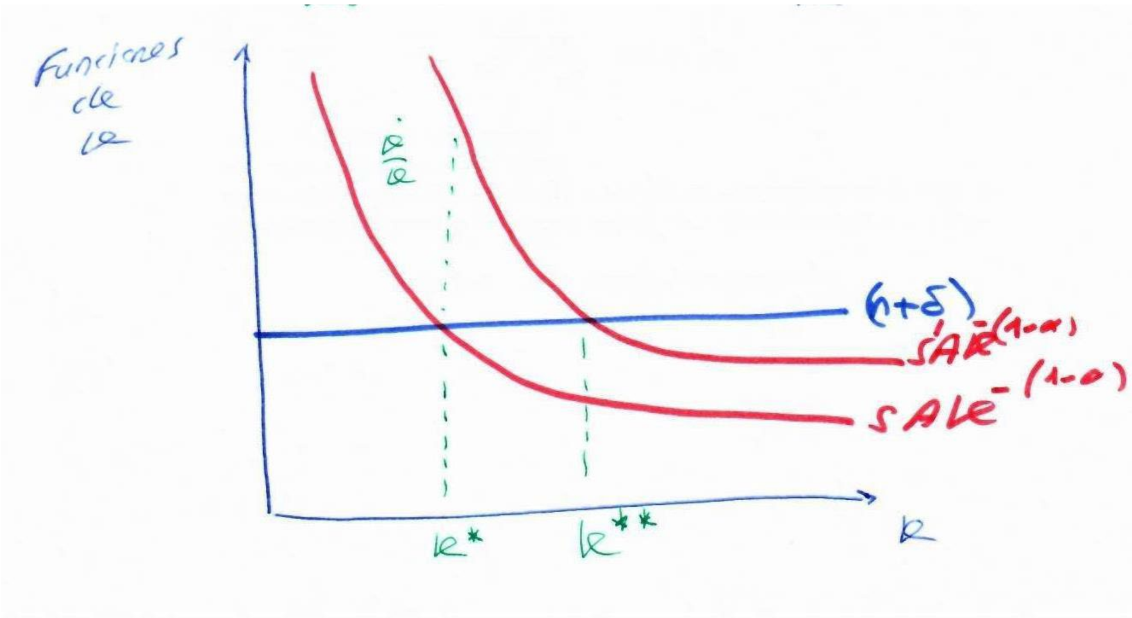
$\alpha \leq 1$: Esta condición es necesaria para que la *Función de Producción* tenga *Rendimientos Contantes a Escala.*

Por tanto, $1-\alpha \geq 0$. En consecuencia $sAk^{-(1-\alpha)} = \frac{sA}{k^{(1-\alpha)}}$ es una Función decreciente con el Stock de Capital.

Análisis Gráfico.



Adelantar la Hipótesis de Convergencia.



Tasa de Crecimiento. Análisis general.

$y = f(A, k)$ no es Cobb-Douglas

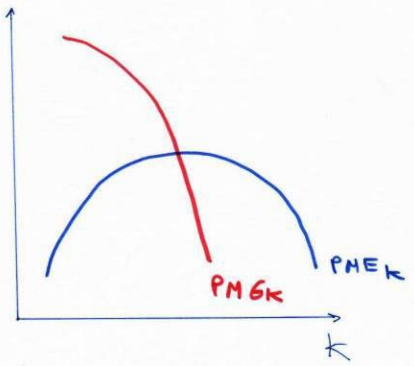
$$\dot{k} = sy - (n+\delta)k$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sy}{k} - (n+\delta)$$

$$\frac{y}{k} = \frac{Y/L}{K/L} = \frac{Y}{K}$$ Producto medio del capital

Producto marginal Decreciente

Implica Producto medio Decreciente ~~cuando en~~ a partir de un cierto nivel de K



Tasa de Crecimiento de la Renta per cápita.

$$y = Ak^{\alpha}$$
$$\ln y = \ln A + \alpha \ln k$$
$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{k}}{k}$$

En general:

$$y = f\left(A, k\right)$$
$$\dot{y} = f'\left(A, k\right)\dot{k}$$
$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{f'\left(A, k\right)}{f\left(A, k\right)}\dot{k} = \frac{f'\left(A, k\right)k}{f\left(A, k\right)}\frac{\dot{k}}{k}$$

$$\frac{f'\left(A, k\right)k}{f\left(A, k\right)} = \frac{r\frac{K}{L}}{\frac{Y}{L}} = \frac{rK}{Y} = S_k$$